PRIMITIVES ET INTÉGRALES

1. Primitives et intégrales indéfinies

1.1. Exemples introductifs

Dans le cadre de certains problèmes, il arrive que l'on s'intéresse tout spécialement au taux de variation *d'une fonction plutôt qu'à la fonction elle-même (taux de natalité, taux d'inflation, vitesse, etc.).*
La traduction mathématique de ces problèmes donne naissance à des équations qui contiennent des dérivées (équations différentielles).

Exemple 1 : résoudre l'équation différentielle $g'(x) = 2x$.

L'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble de toutes les fonctions $g(x)$ qui vérifient cette égalité. Quelles sont ces solutions ?

Exemple 2 : du sol, on lance un objet verticalement avec une vitesse initiale de 32 (m/s). Sachant que l'accélération due à la force de pesanteur vaut environ 10 (m/s^2) , calculer

a) la vitesse de l'objet t secondes après son lancement

b) la distance parcourue par l'objet t secondes après son lancement

c) la hauteur maximale atteinte par l'objet

Rappel : dans le cas d'un corps animé d'un mouvement rectiligne par une force dont la direction est identique à celle du mouvement, on a les relations

$$a(t) = v'(t) \quad et \quad v(t) = d'(t) \ ,$$

où $a(t)$, $v(t)$ et $d(t)$ représentent respectivement l'accélération, la vitesse et la distance parcourue par le corps « t » unités de temps après l'instant initial (t = 0).

Ces exemples ont donné lieu à la recherche de fonctions dont les dérivées étaient connues, c'est-à-dire à la recherche de *primitives*.

1.2 Primitives

Une *primitive* de la fonction f est une fonction dont la dérivée première est f.
Autrement dit, la fonction F est une primitive de la fonction f si et seulement si $F' = f$.

Ainsi, dans l'exemple 1, lorsqu'on cherche les fonctions dont la dérivée est $2x$, on cherche les primitives de la fonction $f(x) = 2x$.

Précisons encore la notion de primitive :

Définition

Si f est une fonction continue sur un intervalle I inclus dans $\boldsymbol{R}$, alors une primitive de f sur I est une fonction F définie sur I, telle que $F'(x) = f(x)$, pour tout réel x dans I .

Autres exemples

- La fonction $F(x) = \cos x$ est une primitive sur un intervalle I quelconque de $\boldsymbol{R}$ de la fonction $f(x) = -\sin x$, car $\forall x \in R : (\cos x)' = -\sin x$.
- La fonction $F(x) = \sqrt{x}$ est une primitive sur un intervalle I quelconque de R_0^+ de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, car $\forall x \in R_0^+ : \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercices

1. Résoudre les équations différentielles suivantes en tenant compte des conditions.

   a) $f'(x) = 4x^3$ avec $f(0) = 2$;

   b) $\dfrac{dP}{dt} = 27 - 3t^2$ avec $P(2) = 30$ (remarque[1] : $\dfrac{dP}{dt} = P'(t)$)

   c) $f''(x) = 2x$ avec $f'(0) = 1$ et $f(-1) = 2$;

   d) $\dfrac{dN}{dt} = N(t)$ avec $N(0) = 1000$.

---

2. La fonction f est-elle une primitive de la fonction g ? Justifier.

   a) $f(x) = (2x-1)^2$ et $g(x) = 4 \cdot (2x-1)$

   b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

   c) $f(x) = \left(x^3+2\right)^3$ et $g(x) = 6x \cdot \left(x^3+2\right)^2$

---

3. Une balle est lancée verticalement vers le bas d'une hauteur de 35 mètres avec une vitesse initiale de 30 (m/s) .
   Sachant que l'accélération g due à la pesanteur vaut environ 10 $\left(m/s^2\right)$:

   a) À quel instant la balle heurtera-t-elle le sol ?

   b) Quelle sera la vitesse de la balle à cet instant ?

---

4. Une balle roule sur un terrain avec une décélération constante, due aux forces de frottement, de 2 $\left(m/s^2\right)$. Sachant que la vitesse initiale de la balle était de 8 (m/s) , calculer la distance qu'elle parcourra avant de s'arrêter.

---

5. En chaque point (x,y) d'une courbe, la pente de la tangente est égale au triple de l'abscisse.
   Quelle est l'équation de cette courbe sachant qu'elle passe par le point $(2,4)$?

[1] Il s'agit de la *notation différentielle* de LEIBNIZ.

1.3. Intégrale indéfinie

Si une fonction possède une primitive, alors elle en possède une infinité.
Par exemple, toutes les fonctions de la forme $F(x) = x^5 + c$ où c est une constante réelle sont des primitives de la fonction $f(x) = 5x^4$.

Définition
L'ensemble des primitives d'une fonction f sur un intervalle I de $\boldsymbol{R}$ s'appelle *intégrale indéfinie* de f. On note cet ensemble $\int f(x)dx$.

Par exemple : $\int 3x^2dx = \{F : R \to R \mid F(x) = x^3 + c \ , (c \in R)\}$.

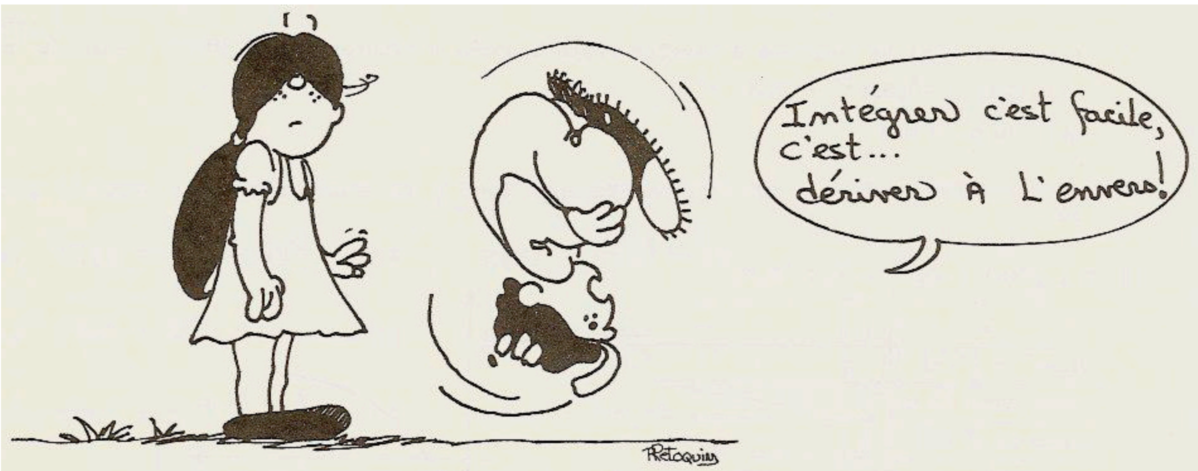
Par abus de notation, on écrit : $\int 3x^2dx = x^3 + c$.

En général, si $F'(x) = f(x)$, alors $\int f(x)dx = F(x) + c$, $(c \in R)$.

<u>Remarque</u>

L'origine de la notation de l'intégrale indéfinie sera expliquée plus tard. Pour l'instant, contentons-nous de dire que « $\int$ » est une « s » allongée et que le rôle du « dx » est d'indiquer que l'on cherche les primitives d'une fonction de la variable x.
Si l'on recherche les primitives de la fonction P de la variable t, on écrira $\int P(t)dt$.

L'intégration (c'est-à-dire la recherche des primitives) d'une fonction est en fait le processus inverse de la dérivation.



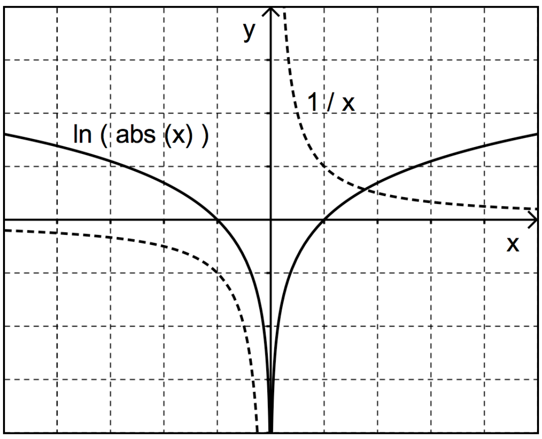
Quelques intégrales indéfinies immédiates

(1)	$\int 0 \cdot dx = c \quad (c \in R)$	(8)	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
(2)	$\int a \cdot dx = ax + c \quad (a \in R)$	(9)	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$
(3)	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$	(10)	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
(4)	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + c$	(11)	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + c$
(5)	$\int e^x dx = e^x + c$	(12)	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
(6)	$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + c$	(13)	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = -arc\cot x + c$
(7)	$\int \cos x \cdot dx = \sin x + c$		

Remarque à propos des primitives de la fonction $1/x$

Nous savons que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Il faut toutefois se rappeler que le domaine de définition de la fonction $\ln x$ est R_0^+ , et que sa dérivée est donc la fonction $\frac{1}{x}$ restreinte à R_0^+ .

Lorsque nous cherchons toutes les primitives de $\frac{1}{x}$, nous devons considérer cette fonction sur son domaine, c'est-à-dire R_0 , et déterminer des primitives définies sur R_0 .



Les primitives de $\frac{1}{x}$ sur R_0^+ sont les fonctions de la forme $\ln x + c$, mais les primitives de $\frac{1}{x}$ sur R_0^- sont les fonctions de la forme $\ln(-x) + c$.

Par conséquent, les primitives de $\frac{1}{x}$ sur R_0 sont les fonctions de la forme $\begin{cases} \ln x + c & si \quad x > 0 \\ \ln(-x) + c & si \quad x < 0 \end{cases}$, c'est-à-dire de la forme $\ln\lvert x\rvert + c$.

Propriétés des intégrales indéfinies

Soient deux fonctions réelles f et g. Soient les fonctions F et G, primitives respectives de f et de g.

> Propriété 1 : $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$, k étant une constante réelle.

<u>Preuve</u>

a) F étant une primitive de f, on a : $\int f(x)dx = F(x) + c \quad (c \in R)$.
Donc, $k \cdot \int f(x)dx = k \cdot F(x) + k \cdot c = k \cdot F(x) + a$ (où $a = k \cdot c$ est une autre constante réelle).

b) D'autre part, $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot F(x) + a$.
En effet, $[k \cdot F(x) + a]' = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$.

De a) et b), on déduit la thèse.

<u>Application</u> : $\int 7x^2 dx = 7 \cdot \int x^2 dx = 7\dfrac{x^3}{3} + c$.

> Propriété 2 : $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

<u>Preuve</u>

a) F et G étant des primitives respectivement de f et g, on a :
$\int f(x)dx = F(x) + c_1$ et $\int g(x)dx = G(x) + c_2$, où c_1 et c_2 sont des constantes réelles.
Donc, $\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + c_1 + G(x) + c_2 = F(x) + G(x) + c$.

b) D'autre part, $\int [f(x) + g(x)]dx = F(x) + G(x) + c$.
En effet, $[F(x) + G(x) + c]' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$.

De a) et b), on déduit la thèse.

<u>Application</u> : $\int (2x + 5)dx = \int 2x dx + \int 5 dx = x^2 + 5x + c$.

> Une « non propriété » : en général, $\int [f(x) \cdot g(x)]dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$.

<u>Preuve</u> : trouver un contre-exemple.

Exercices

1. Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\int \left(6x^2 - 10x + 8\right)dx$

b) $\int \left(2t^3 - 3t - 5\right)dt$

c) $\int \left(3x + \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}\right)dx$

d) $\int \left(4x^3 + 3x^2 + 2x + 1\right)dx$

e) $\int \left(4t^{\frac{1}{3}} + 2t^{\frac{1}{2}}\right)dt$

f) $\int \frac{1 - x^2}{x^2}dx$

g) $\int \left(x^{-\frac{2}{3}} - x^{\frac{3}{2}}\right)dx$

h) $\int \frac{x^2 + 2}{x^2}dx$

i) $\int (2x + 3)^2 dx$

j) $\int \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

k) $\int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^2 dx$

l) $\int \frac{3x^2 + 1}{x}dx$

m) $\int \left(5x^3 - 10y^2 + 8y + 1\right)dx$

n) $\int \left(5x^3 - 10y^2 + 8y + 1\right)dy$

---

2. Parmi les primitives de la fonction $f(x) = 3x^2 - 8x + 4$, laquelle vaut 0 pour $x = 1$?

---

3. Déterminer la fonction $f(t)$ telle que $f''(t) = 12t + 6$, sous les conditions $f'(2) = 2$ et $f(-3) = -1$.

---

4. Parmi les primitives de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, laquelle vaut 2 pour $x = e$?

---

5. Un mobile se déplace sur un axe avec une accélération constante de 0,5 (m/s²).

   a) Déterminer sa vitesse à l'instant 3 si l'on sait que sa vitesse à l'instant 1 est 2 (m/s).

   b) Déterminer sa position à l'instant 3 si l'on sait, en outre, qu'il est au point d'abscisse 3 à l'instant 1 .

---

6. Déterminer la fonction telle que le coefficient angulaire de la tangente à son graphique en son point d'abscisse x est $2x + 1$ et sachant en outre qu'il comprend le point $P(-2,0)$. Déterminer l'équation de la tangente en P .

2. Méthodes de recherches de primitives

2.1. Primitives quasi immédiates

Les formules suivantes découlent toutes des règles de dérivation.

$$(14) \qquad \int [f(x)]^n \cdot f'(x) \cdot dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

$$(15) \qquad \int e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot dx = e^{f(x)} + c$$

$$(16) \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

$$(17) \qquad \int \sin f(x) \cdot f'(x) \cdot dx = -\cos f(x) + c$$

$$(18) \qquad \int \cos f(x) \cdot f'(x) \cdot dx = \sin f(x) + c$$

Vérifions par exemple la formule (14). Il suffit de s'assurer que la dérivée du second membre est égale à l'expression figurant dans le symbole d'intégration :

$$\left\{ \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \right\}' = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot [f(x)]^n \cdot f'(x) = [f(x)]^n \cdot f'(x) \; .$$

<u>Exercice</u> : vérifier la validité des autres formules.

<u>Exemples d'applications</u>

1. Déterminer $\int (x^3 + 7)^5 \cdot 3x^2 dx$.

   Il suffit d'utiliser la formule (14) en posant $f(x) = x^3 + 7$.

   On a bien $f'(x) = (x^3 + 7)' = 3x^2$. Donc : $\int (x^3 + 7)^5 \cdot 3x^2 dx = \dfrac{(x^3 + 7)^6}{6} + c$.

2. Déterminer $\int (x^3 + 1)^5 \cdot x^2 dx$.

   Posons $f(x) = x^3 + 7$, ce qui donne $f'(x) = 3x^2$.
   Afin de pouvoir appliquer la formule (14), il faut faire apparaître $f'(x)$ dans l'expression à intégrer. Pour cela, multiplions et divisons celle-ci par 3 :

   $$\int (x^3 + 1)^5 \cdot x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot \int (x^3 + 1)^5 \cdot 3x^2 dx \; .$$

   La dernière intégrale peut ainsi être « traitée » par la formule (14) :

   $$\frac{1}{3} \cdot \int (x^3 + 1)^5 \cdot 3x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(x^3 + 1)^6}{6} + c = \frac{(x^3 + 1)^6}{18} + c$$

3. Déterminer $\int \frac{3x}{5x^2-1}dx$.

Nous observons que le numérateur est, à un facteur près, la dérivée du dénominateur. Cela nous suggère l'utilisation de la formule (16).
Posons $f(x)=5x^2-1$, ce qui donne $f'(x)=10x$. Afin de pouvoir appliquer la formule (16), multiplions et divisons l'expression à intégrer par $\frac{10}{3}$:

$$\int \frac{3x}{5x^2-1}dx = \frac{3}{10}\cdot\int \frac{10}{3}\cdot\frac{3x}{5x^2-1}dx = \frac{3}{10}\cdot\int\frac{10x}{5x^2-1}dx \ .$$

La dernière intégrale peut ainsi être « traitée » par la formule (16) :

$$\frac{3}{10}\cdot\int\frac{10x}{5x^2-1}dx = \frac{3}{10}\cdot\ln\left|5x^2-1\right|+c \ .$$

Exercices de recherches de primitives

Série 1

1. $\int\left(x^3+2x^2\right)^5\cdot\left(3x^2+4x\right)dx$
2. $\int 2x\cdot\sqrt{x^2+4}\cdot dx$
3. $\int\frac{3}{(3z+2)^2}dz$
4. $\int e^{3x}dx$
5. $\int\frac{1}{3x}dx$
6. $\int\frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}dx$
7. $\int\frac{10x^4}{\left(2x^5-1\right)^3}dx$
8. $\int\left(x^2+4\right)^3dx$
9. $\int\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)dx$
10. $\int x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx$
11. $\int\left(e^{3x}+x^3-\frac{1}{x^3}\right)dx$
12. $\int\left(t^3+1\right)\cdot 6t^2dt$
13. $\int(2x-1)^3dx$
14. $\int 5\cdot\sqrt{2y+1}\cdot dy$
15. $\int\frac{x}{x^2+1}dx$
16. $\int(3x-1)^4dx$
17. $\int e^{-\frac{4t}{3}}dt$
18. $\int\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$
19. $\int 2x^2\cdot e^{-x^3}dx$
20. $\int\frac{e^t}{1+e^t}dt$
21. $\int\frac{x^3}{2x^4+1}dx$
22. $\int\frac{t+3}{\left(t^2+6t\right)^2}dt$
23. $\int x\cdot\sqrt{3x^2+1}\cdot dx$
24. $\int\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$

25. $\int (m+x)\cdot(a+x)dx \quad (a,m \in R)$

26. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$

27. $\int x\cdot\left(x^2+a^2\right)^8 dx \quad (a\in R)$

28. $\int \frac{k}{(ax+b)^2}dx \quad (a\in R_0; b,k\in R)$

29. $\int \frac{4x^2}{x^3+1}dx$

30. $\int x\cdot e^{x^2}dx$

31. $\int 12x\cdot\cos\left(x^2+1\right)\cdot dx$

32. $\int \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^3}{\sqrt{x}}dx$

Série 2

1. $\int \sin^2 x\cdot\cos x\cdot dx$

2. $\int \cos^3 x\cdot\sin x\cdot dx$

3. $\int \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}dx$

4. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

5. $\int \tan x\cdot dx$

6. $\int \cot x\cdot dx$

Série 3 (fonctions cyclométriques)

1. $\int \frac{1}{1+4x^2}dx$

2. $\int \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\cdot dx$

3. $\int \frac{-5}{\sqrt{9-x^2}}\cdot dx$

4. $\int \frac{2}{25x^2+16}dx$

2.2. Intégration par changement de variable (substitution)

Les formules (14) à (18), que nous avons vues sous le titre « intégrales quasi immédiates », nous permettent déjà de déterminer beaucoup de primitives. En fait, ces formules sont toutes un cas particulier de la formule suivante.

Soit une fonction g et soit G une primitive de g. Si f est une fonction dérivable telle que $f(x)$ appartienne aux domaines de g et de G, quel que soit x dans un certain intervalle, alors :

$$\int g\big(f(x)\big)\cdot f'(x)dx = G\big(f(x)\big) + c \qquad (19)$$

<u>Preuve</u>

Il faut appliquer au second membre la formule de dérivation des fonctions composées[2], et tenir compte du fait que $G' = g$:

$$\big\{G\big(f(x)\big)+c\big\}' = G'\big(f(x)\big)\cdot f'(x) = g\big(f(x)\big)\cdot f'(x) \ .$$

Voyons maintenant la nouvelle méthode, dite du *changement de variable* ou de *substitution*.

Dans la formule (19), posons $u = f(x)$. D'après la définition de la différentielle, nous avons alors $du = f'(x)\cdot dx$.
Si nous introduisons formellement ces éléments dans la formule (19), nous obtenons :

$$\int g(u)\cdot du = G(u) + c \ .$$

Notons bien que dans cette expression, la lettre u représente une fonction et non pas une variable indépendante.

<u>Remarque</u> : lorsque nous écrivons $du = f'(x)\cdot dx$, le second membre de l'égalité est sans conteste un produit *(définition d'une différentielle). Par contre, lorsqu'au début du chapitre, nous avons introduit la notion d'intégrale indéfinie, nous avons considéré le « dx » comme un simple indicateur de variable. Le fait que nous nous soyons permis d'écrire*

$$\int g\big(f(x)\big)\cdot \underline{f'(x)dx} = \int g(u)\cdot \underline{du} \ ,$$

nous amène maintenant à voir le $f'(x)dx$ de l'énoncé comme un produit également ! C'est ce que nous ferons dorénavant. Ce procédé est licite et peut se justifier de façon rigoureuse.

[2] Voir cours de 5[e] : $\big[(v\circ u)(x)\big]' = \big[v\big(u(x)\big)\big]' = v'\big(u(x)\big)\cdot u'(x)$.

Exemples de calculs d'intégrales indéfinies par la méthode du changement de variable

1. Calculer $\int \left(x^3-2\right)^4 \cdot x^2 dx$.

Posons $u = x^3 - 2$. Calculons la différentielle de u : $du = 3x^2 \cdot dx$.
Comme nous savons maintenant que « tout est produit », nous avons : $x^2 \cdot dx = \dfrac{du}{3}$.

Introduisons ces éléments dans l'énoncé, de manière à ce que la fonction à intégrer ne contienne plus que la variable u :

$$\int \left(x^3-2\right)^4 \cdot x^2 dx = \int u^4 \cdot \frac{du}{3} .$$

Cherchons la primitive en fonction de u : $\int u^4 \cdot \dfrac{du}{3} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{u^5}{5} + c = \dfrac{u^5}{18} + c$.

Il reste à exprimer le résultat en fonction de la variable x : $\int \left(x^3-2\right)^4 \cdot x^2 dx = \dfrac{\left(x^3-2\right)^5}{18} + c$.

Il est naturel de se poser la question « pourquoi une nouvelle méthode pour calculer des intégrales que nous savions déjà faire ? »
Voyons un exemple plus convaincant de l'utilité de la technique de substitution.

2. Calculer $\int (2x+1)^{10} \cdot x \cdot dx$.

Posons $u = 2x + 1$ (*) . Cela entraîne $du = 2 \cdot dx$ et $dx = \dfrac{du}{2}$. Observant l'énoncé, nous voyons qu'il faut encore exprimer le facteur x en fonction de u ; d'après (*) : $x = \dfrac{u-1}{2}$.
Effectuant tous les remplacements, nous obtenons :

$$\int (2x+1)^{10} \cdot x \cdot dx = \int u^{10} \cdot \frac{u-1}{2} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{4} \cdot \int \left(u^{11} - u^{10}\right) \cdot du = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{u^{12}}{12} - \frac{u^{11}}{11}\right) + c .$$

Finalement : $\int (2x+1)^{10} \cdot x \cdot dx = \dfrac{(2x+1)^{12}}{48} + \dfrac{(2x+1)^{11}}{44} + c$.

Un autre avantage de la méthode du changement de variable est qu'elle évite des manipulations de constantes multiplicatives qui étaient courantes dans les intégrales quasi immédiates. Pour illustrer cela, voici un exemple menant à une fonction cyclométrique.

> 3. Calculer $\int \frac{-5}{\sqrt{1-16x^2}}\,dx$.

Cet énoncé ressemble à celui de la formule (10) à cette différence près que nous avons $16x^2$ au lieu de x^2 . Il est donc naturel de poser $u = 4x$, pour obtenir $u^2 = 16x^2$.

La différentielle de u étant $du = 4 \cdot dx$, nous avons $dx = \frac{du}{4}$. Remplaçons …

$$\int \frac{-5}{\sqrt{1-16x^2}}\,dx = \int \frac{-5}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{4} = -\frac{5}{4} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot du = -\frac{5}{4} \cdot \arcsin u + c \ .$$

Finalement : $\int \frac{-5}{\sqrt{1-16x^2}}\,dx = -\frac{5}{4} \cdot \arcsin(4x) + c$.

Exercices

Calculer les intégrales indéfinies suivantes en utilisant la méthode de substitution.
Pour certains exercices, le changement de variable à utiliser est indiqué.

1. $\int 7e^{5x}dx$
2. $\int 5 \cdot \sin 3x \cdot dx$
3. $\int \frac{7x^2}{\sqrt[3]{2x^3-5}}\,dx$
4. $\int \sqrt{2x-3} \cdot 5x \cdot dx$
5. $\int \frac{5x^2}{x^3-1}\,dx$
6. $\int \frac{\cos q}{1+4\sin q}\,dq$
7. $\int x \cdot \sqrt{5+3x} \cdot dx$
8. $\int \frac{2 \cdot \sin t \cdot \cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\,dt$
9. $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2-2}}$ [$x = \frac{1}{t}$]
10. $\int \frac{dx}{e^x+1}$ [$x = -\ln t$]
11. $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x+1}}$ [$t = \sqrt{x+1}$]
12. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} \cdot dx$ [$t = 1+\sqrt{x}$]

2.3. Intégration par parties

La technique d'intégration par parties provient de la règle de dérivation d'un produit.
Cette technique permet d'intégrer *certains* produits qui résistent aux méthodes précédentes.

Soient u et v deux fonctions de la variable x, toutes deux dérivables.

Dérivons leur produit : $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Nous pouvons en tirer : $u \cdot v' = (u \cdot v)' - u' \cdot v$.

Égalons les primitives des deux membres : $\int u \cdot v' \cdot dx = \int (u \cdot v)' \cdot dx - \int u' \cdot v \cdot dx$.

Nous obtenons ainsi la formule d'intégration par parties :

$$\boxed{\int u \cdot v' \cdot dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \cdot dx \qquad (20)}$$

Exemple : calculer $\int x \cdot e^x dx$. Posons : $u = x$. On a : $u' = 1$.
Posons : $v' = e^x$. On a : $v = e^x$.

Utilisant la relation (20), nous obtenons :

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c = e^x \cdot (x-1) + c \ .$$

Remarques et conseils

1° La fonction choisie pour v' doit être aisément intégrable.
2° $\int u' \cdot v \cdot dx$ doit être plus facile à déterminer que $\int u \cdot v' \cdot dx$!
3° Quand l'expression à intégrer par parties est un produit d'une fonction polynôme par une fonction algébrique non polynôme ($1/x$, $\sqrt{x}$) ou une fonction transcendante ($\sin x$, e^x, etc.), on représente généralement par u la fonction polynôme (car u' sera un polynôme de degré inférieur à celui de u) ; il y a cependant des exceptions ...
4° Quand l'expression à intégrer par parties est un produit de deux fonctions polynômes, il convient de représenter par u le polynôme de degré inférieur.
5° Avant d'appliquer la technique d'intégration par parties, il faut d'abord vérifier si l'intégrale ne peut pas se calculer directement (penser aux intégrales quasi immédiates).

Exercices

Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\int x^2(x+3)^4 dx$	d) $\int x \cdot \ln x \cdot dx$	g) $\int x^3 e^x dx$	j) $\int \ln x \cdot dx$
b) $\int x \cdot \sqrt{x+1} \cdot dx$	e) $\int x^5 \cdot \ln x \cdot dx$	h) $\int x \cdot \sin x \cdot dx$	k) $\int x \cdot e^{x^2} dx$
c) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$	f) $\int x^2 e^x dx$	i) $\int \cos^2 x \cdot dx$	

2.4. Quelques conseils généraux

À l'aide des méthodes que nous venons de voir, il est déjà possible de calculer beaucoup d'intégrales indéfinies courantes. Toutefois, l'étude des méthodes d'intégration est un sujet très vaste et bien d'autres méthodes existent. En attendant, il faut noter que, dans certains cas, des transformations simples de l'expression à intégrer mènent rapidement à la solution.
Il faut dès lors prendre le temps d'analyser l'énoncé et ne recourir à un changement de variable, à l'intégration par parties ou à une décomposition en fractions partielles que si aucune transformation avantageuse n'est possible.

En bref, aller du plus simple au plus élaboré …

Conseil 1 : il faut parfois simplement distribuer.

Exemple 1 : $\int (x^2+x+1)\cdot\sqrt{x}\cdot dx = \int \left(x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$.

Conseil 2 : il est souvent utile de décomposer une fraction en une somme de plusieurs fractions.

Exemple 2 :

$$\begin{aligned}
\int \frac{3+x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= 3\cdot\arcsin x - \frac{1}{2}\cdot\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= 3\cdot\arcsin x - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-x^2} + c
\end{aligned}$$

Conseil 3 : il y a souvent intérêt à simplifier les fractions ; plus généralement, lorsqu'il faut intégrer une fraction rationnelle dont le numérateur à un degré supérieur ou égal à celui du dénominateur, il est avantageux d'effectuer la division euclidienne.

Exemple 3 : $\int \frac{x^3+2x-1}{x^2}dx = \int \left(x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 2\cdot\ln|x| + \frac{1}{x} + c$.

Exemple 4 : $\int \frac{2x^3+x-3}{x^2+1}dx$.

Effectuons la division :

$$\begin{array}{l|l}
2x^3+x-3 & x^2+1 \\ \cline{2-2}
-(2x^3+2x) & 2x \\ \hline
-x-3 &
\end{array}$$

Nous pouvons donc écrire : $2x^3+x-3 = 2x\cdot(x^2+1) + (-x-3)$.

$$\int \frac{2x^3+x-3}{x^2+1}dx = \int \frac{2x\cdot(x^2+1)-x-3}{x^2+1}dx = \int 2x\cdot dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx - \int \frac{3}{x^2+1}dx = ...$$

Ce qui se termine sans difficulté.

Conseil 4 : penser aux formules de trigonométrie.

Exemple 5 : $\int \sin^2 x \cdot dx$.

Nous avons déjà résolu cette intégrale en procédant par parties.
Mais nous pouvons aussi penser à une des formules de CARNOT et en extraire $\sin^2 x$:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \rightarrow \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \ .$$

Dès lors,

$$\int \sin^2 x \cdot dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int (1-\cos 2x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) + c \ .$$

Exemple 6 : $\int \sin 2x \cdot \cos 4x \cdot dx$.

Dans un tel cas, nous pouvons utiliser les formules de transformation de produit en somme (qui découlent des formules de SIMPSON).

$$\begin{aligned} \int \sin 2x \cdot \cos 4x \cdot dx &= \frac{1}{2} \cdot \int \sin \frac{3x-x}{2} \cdot \cos \frac{3x+x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int (\sin 3x - \sin x) \cdot dx \\ &= -\frac{1}{6} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos x + c \ . \end{aligned}$$

Encore quelques exercices …

… pour lesquels il peut être avantageux de tenir compte des conseils précédents !

Calculez les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\int \frac{\sqrt{x} - x}{x^2} dx$

b) $\int \frac{x^2 + 7x + 6}{x - 1} dx$

c) $\int \frac{3x + 1}{2x - 3} dx$

d) $\int \frac{x^4 + x^2 - 2x}{x^3 - 2} dx$

e) $\int \cos^2 x \cdot dx$

f) $\int (1 + \tan^2 x) \cdot dx$

g) $\int \sqrt{1 - x^2} \cdot dx$ (poser $x = \sin u$)

h) $\int \cos 3x \cdot \cos 5x \cdot dx$

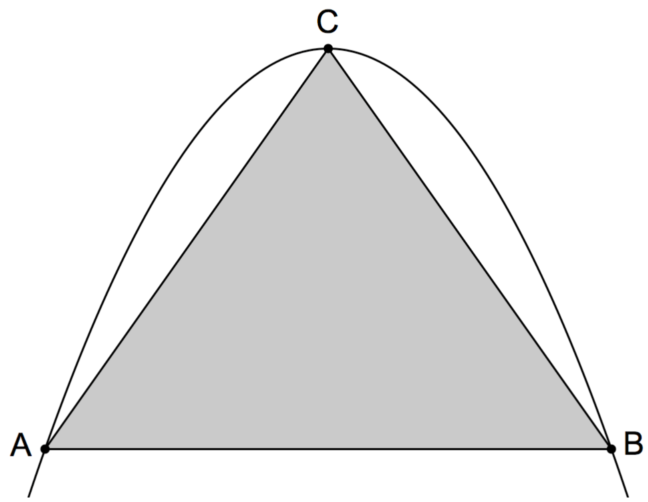
3. Aires et intégrales définies

3.1. Aperçu historique du problème

Le problème de la détermination de l'aire d'une surface limitée par une courbe est très ancien. Pour EUDOXE (né vers 408 avant J.-C.) et les autres géomètres Grecs de l'époque, il ne s'agissait pas d'associer un nombre à une aire, mais plutôt de comparer deux aires entre elles, en calculant leur rapport. Les aires curvilignes étaient ainsi comparées aux aires rectilignes, selon un procédé depuis lors appelé *quadrature* (étymologiquement, la construction d'un carré ayant même aire que la surface curviligne considérée).

Dans *De la quadrature de la parabole*, ARCHIMÈDE (287-212 av. J.-C.) démontre rigoureusement la proposition suivante : *« un segment quelconque compris par une droite et par une parabole est égal à quatre fois le tiers d'un triangle qui a la même base et la même hauteur que le segment »*.

La figure ci-dessous illustre ce résultat : l'aire de la surface comprise entre la parabole et le segment de droite $[AB]$, est égale aux quatre tiers de l'aire du triangle ABC.



Bien que rigoureuse, la méthode utilisée par ARCHIMÈDE était très originale et assez compliquée. C'est peut être la raison pour laquelle il ne fut pas suivi par ses contemporains Grecs et qu'il eut peu de disciples directs.

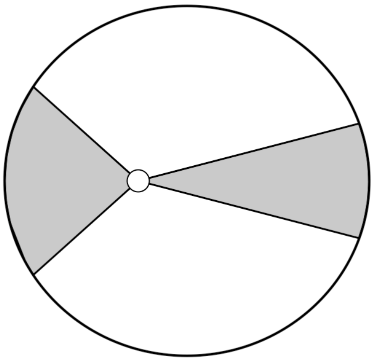
Il faut attendre le IX^{e} siècle pour que les mathématiciens Arabes contribuent à faire revivre les travaux du génial Alexandrin. C'est ainsi que THABIT IBN QURRA (836-901), maîtrisant parfaitement le procédé grec, parvient à calculer l'équivalent des aires sous des fonctions du type $y = \sqrt{px}$.

À partir du X^{e} siècle, les mathématiques arabes commencent à être diffusées dans toute l'Europe, via l'Espagne et la Sicile. Parmi les personnalités contribuant à cette diffusion, citons Gerbert D'AURILLAC (940-1003) qui fréquente les écoles arabes en Espagne entre 967 et 969, Constantin L'AFRICAIN, médecin Tunisien du XI^{e} siècle, qui ramène à Salerne[3] des manuscrits arabes, et Gérard de CRÉMONE (1114-1187), traducteur particulièrement fécond. Soulignons encore le rôle important joué par les marchands et traducteurs juifs. Ces derniers traduisent les manuscrits arabes en langue vulgaire, avant que les traducteurs chrétiens ne les retraduisent en latin.

[3] Capitale de l'actuelle Campanie, région du sud de l'Italie.

Les mathématiciens occidentaux tels le Brugeois Simon STEVIN (1548-1620) ou le Napolitain Luca VALERIO (1552-1618), imitent d'abord la méthode archimédienne tout en l'allégeant au prix de quelques entorses à la rigueur.

Au XVII^{e} siècle, le problème des aires se pose également dans un autre contexte. Dans son étude du mouvement des planètes, Johannes KEPLER (1571-1630) affirme dans sa deuxième loi, qu'en parcourant son orbite elliptique, une planète balaie des aires égales en des temps égaux.



La deuxième loi de KEPLER

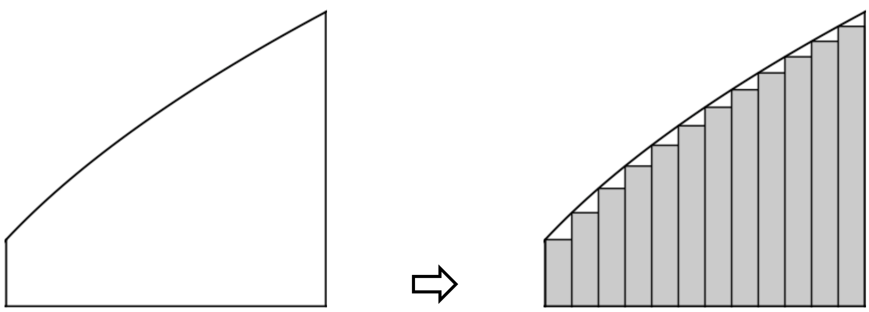
Les méthodes classiques sont abandonnées par KEPLER au profit d'une démarche plus intuitive, faisant appel à des considérations infinitésimales. C'est ainsi qu'il considère le cercle comme un polygone régulier avec un nombre infini de côtés, et qu'il calcule son aire en sommant les aires des triangles infinitésimaux ayant les côtés du polygone comme bases et le centre du cercle comme sommet.
Les travaux de KEPLER ont une grande influence, notamment via un ouvrage publié en 1615, dans lequel on trouve un procédé pour calculer le contenu des tonneaux de vin !

En Italie, Bonaventura CAVALIERI (1598-1647), élève de GALILÉE, développe la méthode des indivisibles dans un ouvrage publié en 1635. Il conçoit une figure plane comme l'ensemble de ses lignes, et un solide comme composé d'un nombre « indéfini » de plans parallèles. Il dit qu'une ligne est formée de points comme un collier de perles, qu'une surface est formée de lignes comme un tissu de fils et qu'un volume est constitué de plans comme un livre de pages.

CAVALIERI

Indépendamment de Cavalieri, Gilles Personne de ROBERVAL (1602-1675) élabore également une méthode des indivisibles, mais plutôt que de concevoir une surface comme formée de lignes, il prétend qu'elle est composée de surfaces :

« On peut comprendre que la multitude infinie de points se prend pour une infinité de petites lignes et compose la ligne entière. L'infinité de lignes représente l'infinité des petites superficies qui composent la superficie totale. L'infinité des superficies représente l'infinité de petits solides qui composent ensemble le solide total. »



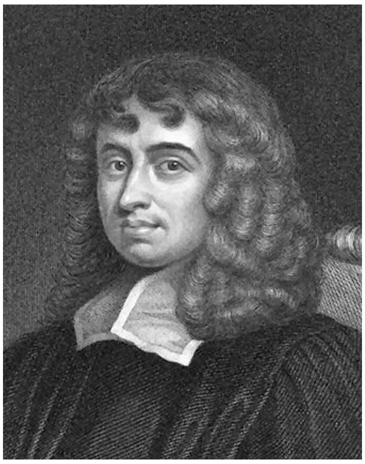
L'idée sous-jacente à la méthode des indivisibles de CAVALIERI - ROBERVAL

Beaucoup d'autres progrès dans le domaine du calcul des aires curvilignes sont réalisés au XVII^{e} siècle, notamment par de grands noms tels que Pierre de FERMAT (1601-1665) et Blaise PASCAL (1623-1662). Néanmoins, les résultats obtenus portent sur des cas particuliers, et l'on n'est pas encore au stade d'une méthode générale pour réaliser des quadratures.

Le grand défaut de la méthode des indivisibles réside dans la difficulté de trouver des formules pour calculer la somme des aires.

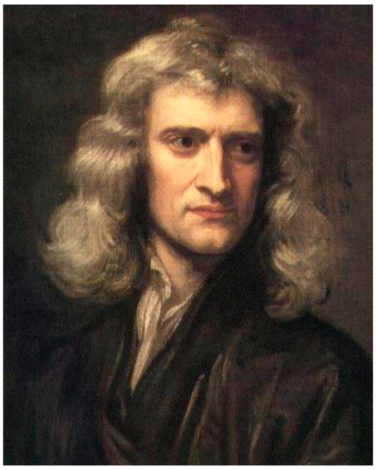
En tentant de résoudre cette difficulté, Isaac BARROW (1630-1677), le maître de NEWTON, découvre qu'il est plus facile de considérer d'abord le taux de variation de l'aire avant de rechercher l'aire elle-même. Il est le premier à reconnaître clairement que le problème des quadratures est l'inverse de celui des tangentes. Cette découverte mènera plus tard au théorème fondamental du calcul intégral.

Avec FERMAT, on peut dire que BARROW a frôlé de très près la découverte d'une méthode générale.



BARROW

Finalement, c'est à Isaac NEWTON (1642-1727) et à Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646-1716) que l'on attribue la paternité du calcul différentiel et intégral. En travaillant indépendamment l'un de l'autre, ils ont en effet rassemblé et organisé les résultats de leurs prédécesseurs en une théorie cohérente et générale, fournissant du même coup une solution définitive au calcul de l'aire d'une surface curviligne.



NEWTON

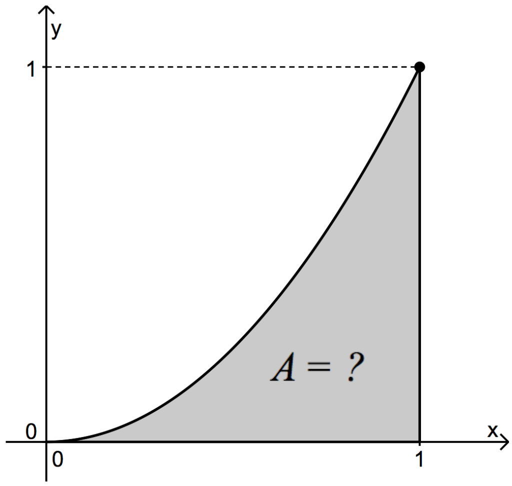
LEIBNIZ

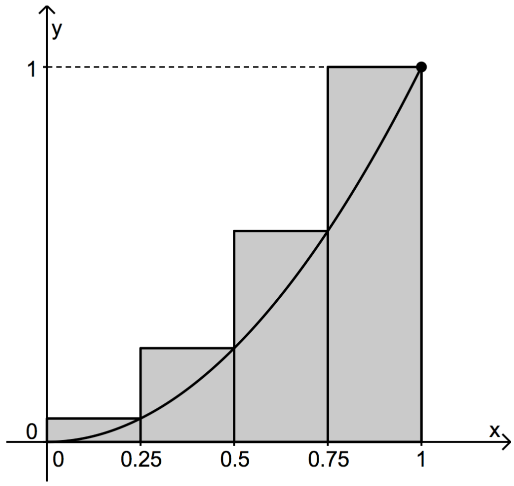
3.2. Évaluer une aire par la méthode des rectangles

<u>Problème</u> : calculer l'aire de la région délimitée par le graphique de la fonction $f(x) = x^2$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

En géométrie, on ne connaît pas de formule permettant d'évaluer l'aire d'une telle surface. Afin d'obtenir différentes approximations de cette aire, voici une méthode ayant une lointaine parenté avec celle des indivisibles de CAVALIERI - ROBERVAL.

Un premier encadrement





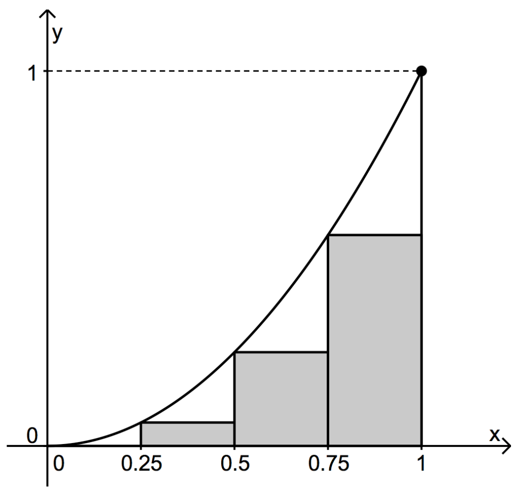
Nous devons déterminer l'aire A représentée sur la figure de gauche.
Nous allons d'abord utiliser un procédé illustré par la figure de droite : divisons l'intervalle $[0,1]$ en quatre sous-intervalles de longueur ¼ .
Utilisons ceux-ci comme bases pour construire des rectangles dont les hauteurs sont les images des extrémités droites des sous-intervalles : $f(0,25)$, $f(0,5)$, $f(0,75)$ et $f(1)$.
L'aire de la région qui nous intéresse est approximativement égale à la somme des aires des quatre rectangles :

$$\begin{aligned} A \quad &\approx \quad \frac{1}{4} \cdot f(0{,}25) + \frac{1}{4} \cdot f(0{,}5) + \frac{1}{4} \cdot f(0{,}75) + \frac{1}{4} \cdot f(1) \\ &= \quad \frac{1}{4} \cdot (0{,}25)^2 + \frac{1}{4} \cdot (0{,}5)^2 + \frac{1}{4} \cdot (0{,}75)^2 + \frac{1}{4} \cdot (1)^2 = 0{,}46875 \ (ua)^4 \end{aligned}$$

Nous avons ainsi obtenu une approximation par excès de l'aire A .

Nous pourrions aussi construire des rectangles dont les hauteurs sont les images des extrémités gauches des sous-intervalles (voir figure ci-contre). Dans ce cas, le premier rectangle disparaît car sa hauteur est nulle.

Si nous calculons la somme des aires des trois rectangles, nous obtenons cette fois une approximation par défaut : $A \approx 0{,}21875 \ (ua)$.



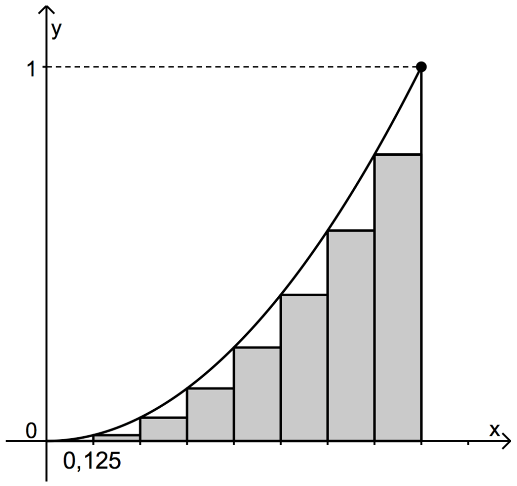
[4] *ua* : unité d'aire

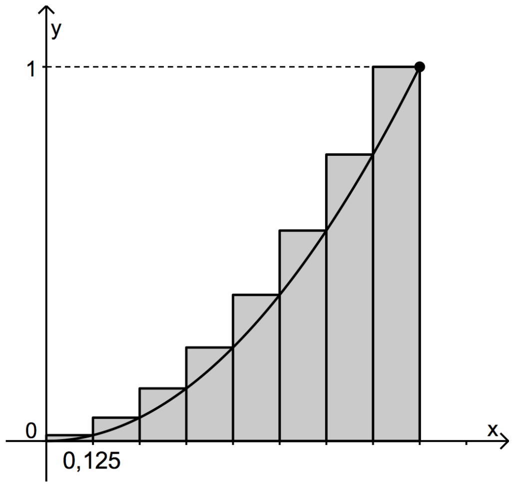
Ces deux approximations nous donnent un premier encadrement de l'aire A :

$$\boxed{0{,}21875 < A < 0{,}46875}\ .$$

Un deuxième encadrement

Nous pouvons augmenter le nombre de rectangles : subdivisons l'intervalle $[0{,}1]$ en huit sous-intervalles de longueur $1/8$, et construisons des rectangles sur ces nouvelles bases. D'abord, nous les construisons pour obtenir une somme inférieure à A (figure de gauche), ensuite pour obtenir une somme supérieure à A (figure de droite).





Vérifiez que l'encadrement obtenu est cette fois :

$$\boxed{0{,}2734375 < A < 0{,}3984375}\ .$$

Nous constatons que le second encadrement est plus étroit que le premier, et que l'aire A est donc cernée avec davantage de précision.

Vers de meilleurs encadrements

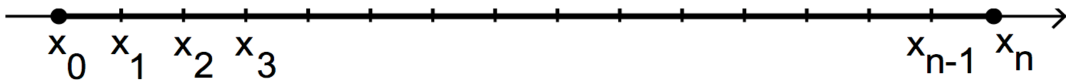
Rien ne nous empêche d'encore augmenter le nombre de rectangles. La table ci-dessous donne le nombre n de rectangles de même base dans l'intervalle $[0{,}1]$, ainsi que les approximations par défaut et par excès ainsi obtenues pour A .

	Approximation de A	
n	par défaut	par excès
16	0,3027344	0,3652344
32	0,3178711	0,3491211
64	0,3255615	0,3411865
100	0,3283500	0,3383500
1000	0,3328335	0,3338335

<u>Exercice</u> : retrouver ces résultats en utilisant un tableur (Excel® par exemple).

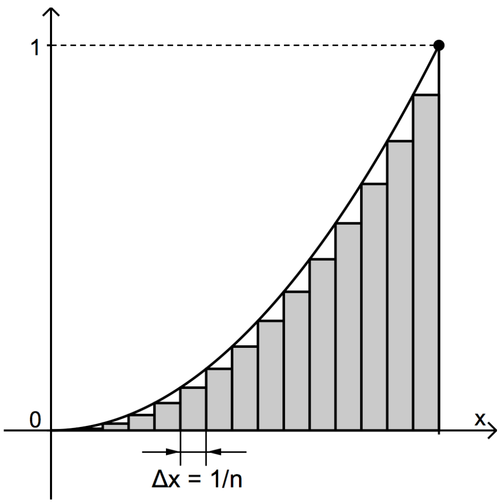
Nous observons que les encadrements deviennent de plus en plus étroits. Nous pouvons supposer que l'aire A est exactement égale à $1/3$ (*ua*), mais cela reste à prouver !

Formalisons le procédé précédent. Subdivisons l'intervalle $[0,1]$ en n sous-intervalles. Désignons par x_0, x_1 , x_2 , x_3 , … , x_{n-1} , x_n les abscisses des points de subdivision (dans le cas de notre exemple, $x_0 = 0$ et $x_n = 1$).

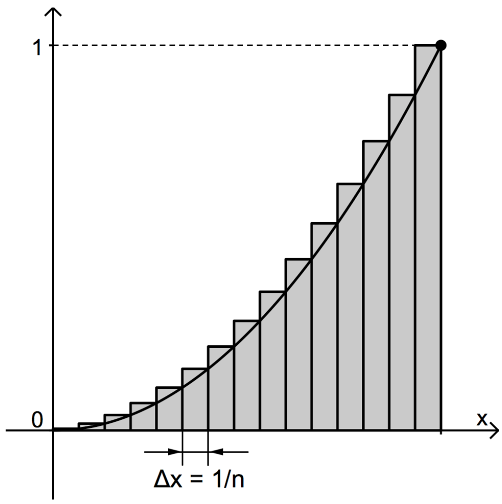


Soit $\Delta x = 1/n$ la longueur de chaque sous-intervalle.

Construisons ensuite des rectangles sur ces nouvelles bases. Comme précédemment, les hauteurs peuvent être les images des extrémités gauches des sous-intervalles, ou les images des extrémités droites.



$A \approx f(x_0)\cdot\Delta x + f(x_1)\cdot\Delta x + ... + f(x_{n-1})\cdot\Delta x$



$A \approx f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + ... + f(x_n)\cdot\Delta x$

On peut montrer que plus le nombre de rectangles augmente, plus la somme de leurs aires tend à se rapprocher de l'aire de la région qui nous intéresse.
Lorsque la fonction f est continue, on peut aussi prouver que les sommes calculées par défaut ou par excès, tendent vers la même limite A lorsque n tend vers l'infini :

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(x_0)\cdot\Delta x + f(x_1)\cdot\Delta x + ... + f(x_{n-1})\cdot\Delta x\right] = A \quad (1)$$

et $$\lim_{n\to\infty}\left[f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_1)\cdot\Delta x + ... + f(x_n)\cdot\Delta x\right] = A \quad (2).$$

Notation pratique

Des sommes qui comportent un grand nombre de termes sont généralement écrites de façon plus compacte grâce au symbole de sommation Σ .

Par exemple : $f(x_0)\cdot\Delta x + f(x_1)\cdot\Delta x + ... + f(x_{n-1})\cdot\Delta x = \sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i)\cdot\Delta x$.

Nous pouvons réécrire les limites (1) et (2) avec cette notation :

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i)\cdot\Delta x \qquad \text{et} \qquad A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i)\cdot\Delta x$$

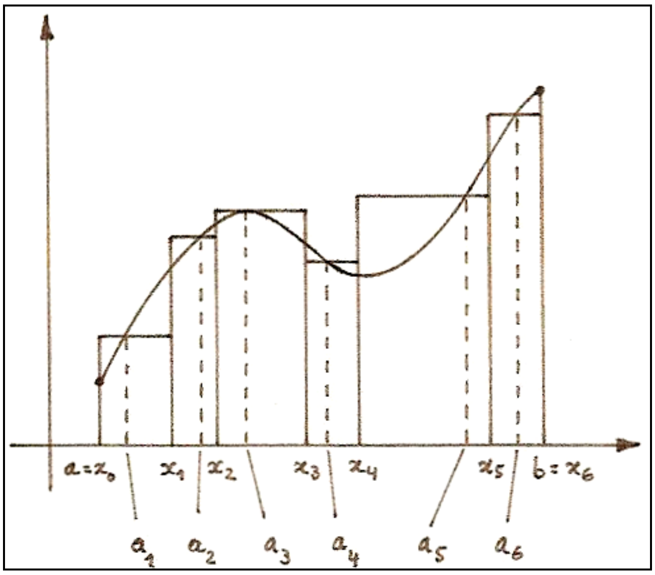
Le calcul de ces limites donne $A = 21$ (ua).

Généralisation

Soit une fonction f, continue et positive dans l'intervalle $[a,b]$.
Divisons l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles, non nécessairement de même longueur. Nous obtenons ainsi les réels x_i, extrémités de ces sous-intervalles, avec

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b .$$

La figure ci-dessous montre un exemple d'une telle subdivision avec $n = 6$.



Dans chacun des intervalles $[x_{i-1}, x_i]$, prenons un réel a_i quelconque (non nécessairement au milieu) dont l'image par f déterminera la hauteur d'un rectangle.

Avec n rectangles, une approximation de l'aire est alors donnée par :

$$A \approx f(a_1)\cdot(x_1 - x_0) + f(a_2)\cdot(x_2 - x_1) + \ldots + f(a_n)\cdot(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{i=n} f(a_i)\cdot \Delta x_i ,$$

avec $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

On peut montrer que cette somme tend vers une limite finie lorsque le nombre d'intervalles augmente indéfiniment. Cette limite ne dépend ni du choix des sous-intervalles, ni du choix du réel a_i dans chacun de ceux-ci.

Nous obtenons ainsi une relation qui nous sera très utile pour la suite :

$$\boxed{A = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{i=n} f(a_i)\cdot \Delta x_i \quad \text{(avec } a_i \in [x_{i-1}, x_i]\text{)} .}$$

La somme présente dans cette relation porte le nom de somme de RIEMANN.

Dans le cas d'une fonction telle que $f(x) = x^2$, le calcul d'un telle limite est réalisable mais il peut être long et fastidieux. Pour éviter de tels calculs, nous allons voir que les primitives vont nous aider. Pour découvrir comment, nous allons nous intéresser à la distance parcourue par un mobile.

3.3. Évaluer la distance parcourue par un mobile

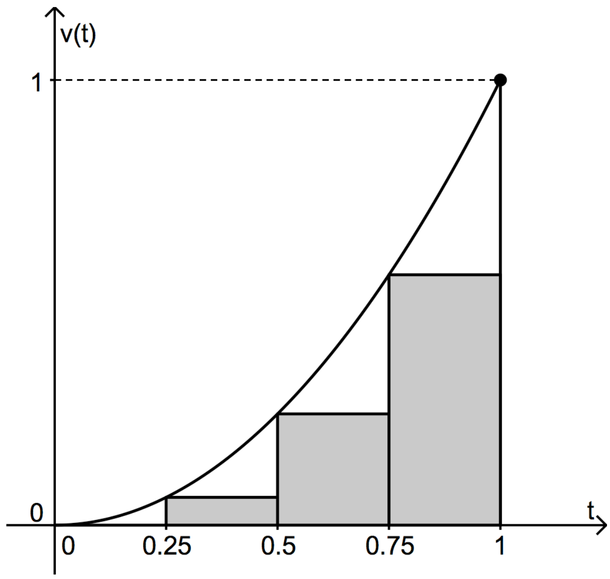
Exemple 1

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme avec une vitesse constante de 10 mètres par seconde.

a) Tracer le graphique de la vitesse du mobile en fonction du temps.
b) Calculer la distance parcourue par le mobile entre $t = 1$ (s) et $t = 5$ (s) .
c) À l'aide du graphique de la vitesse, comment peut-on retrouver la distance parcourue par le mobile entre $t = 1$ (s) et $t = 5$ (s) ?

Exemple 2

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne accéléré et sa vitesse t secondes après son départ ($t = 0$) est donnée par $v(t) = t^2$ (m/s) .



a) Dans ce contexte, expliquer ce que représente chacune des grandeurs suivantes et donner sa valeur.
   - $v(0{,}25)$
   - $v(0{,}25)(m/s) \times 0{,}25(s)$
   - L'aire du premier rectangle construit selon le procédé décrit pour $f(x) = x^2$.
   - La somme des aires des trois rectangles du graphique ci-dessus.
   - L'aire de la région délimitée par la courbe, l'axe des t et les droites $t = 0$ et $t = 1$.

b) Calculer la distance parcourue par le mobile entre $t = 0$ (s) et $t = 1$ (s) , sachant qu'à l'instant $t = 0$, sa distance parcourue était nulle.

c) Déterminer l'aire de la région délimitée par le graphe de v , l'axe du temps et les droites d'équations $t = 0$ et $t = 1$ (utiliser les résultats trouvés en (a) et (b)).

Solution de l'exemple 2 : schéma du raisonnement

<table>
<tr><th>Point de vue physique</th><th>Point de vue graphique</th></tr>
<tr><td colspan="2">L'aire du premier rectangle est une approximation de</td></tr>
<tr><td>la distance parcourue par le mobile entre les instants $t = 0{,}25$ et $t = 0{,}5$</td><td>l'aire entre la parabole, l'axe des t et les abscisses $t = 0{,}25$ et $t = 0{,}5$</td></tr>
<tr><td colspan="2">La somme des aires des trois rectangles est une approximation de</td></tr>
<tr><td>la distance parcourue par le mobile entre les instants $t = 0$ et $t = 1$</td><td>l'aire entre la parabole, l'axe des t et les abscisses $t = 0$ et $t = 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Si le nombre n de rectangles tend vers l'infini,
la somme des aires de ces n rectangles tend vers</td></tr>
<tr><td>la distance exacte parcourue par le mobile entre $t = 0$ et $t = 1$</td><td>l'aire exacte entre la parabole, l'axe des t et les abscisses $t = 0$ et $t = 1$</td></tr>
</table>

Nous sommes ainsi parvenus à calculer l'aire exacte sous le graphique de v à l'aide d'une primitive de v. Ce calcul a été rendu possible par deux choses :

- le lien existant entre la vitesse et la distance : $d'(t) = v(t)$;
- la correspondance entre l'aire et la distance parcourue.

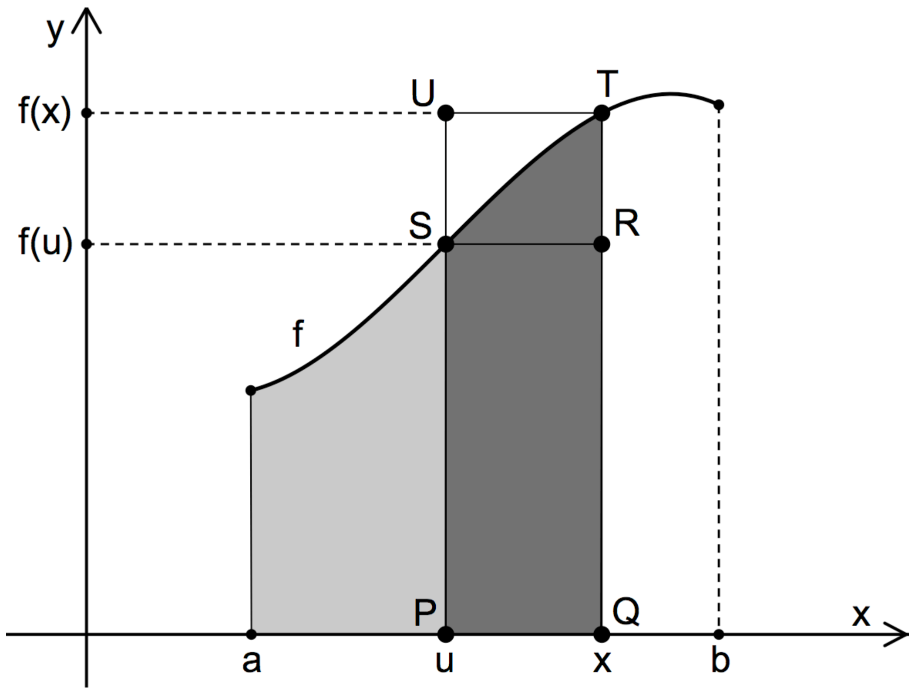
Ce résultat peut-il se généraliser ? Autrement dit, pour trouver une aire sous le graphique d'une fonction, faut-il passer par la primitive de cette fonction ? C'est ce que nous allons voir maintenant.

3.4. Le théorème fondamental du calcul intégral

Soit une fonction f continue, croissante et positive dans l'intervalle $[a,b]$.

Définissons une nouvelle fonction A telle que $A(x)$ égale l'aire de la surface limitée par le graphique de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'abscisses a et x .

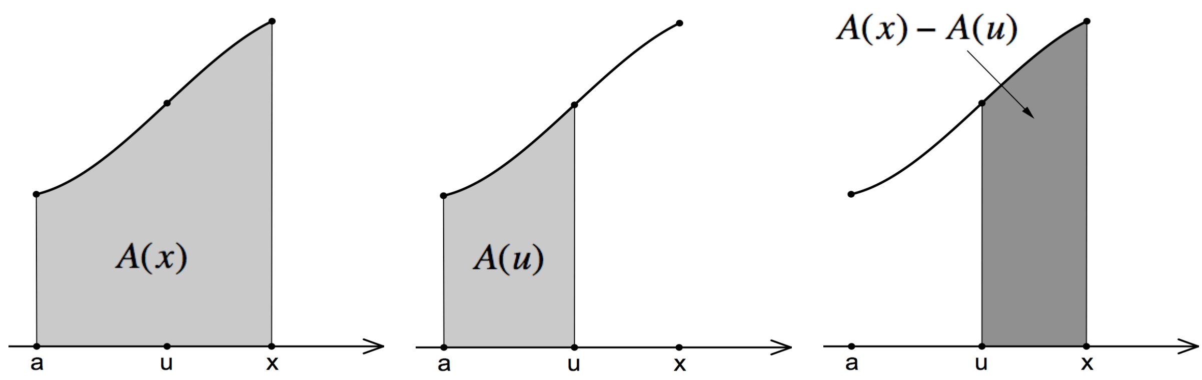
Soit u un réel compris entre a et x . La valeur $A(u)$ représente donc l'aire de la surface limitée par le graphique de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'abscisses a et u .



La somme des aires des deux surfaces grisées est égale à $A(x)$ *, tandis que l'aire grise la plus claire, à gauche, est égale à* $A(u)$.

L'observation de la figure montre que l'aire de la surface en gris foncé est comprise entre les aires des rectangles $PQRS$ et $PQTU$ (a) .

De plus, l'aire de cette surface en gris foncé est égale à $A(x)-A(u)$ comme le montre la figure ci-dessous (b) .



Rassemblant les observations (a) et (b) , nous pouvons donc écrire :

aire du rectangle PQRS ≤ aire de la surface en gris foncé ≤ aire du rectangle PQTU

$$(x-u)\cdot f(u) \le A(x) - A(u) \le (x-u)\cdot f(x)$$

Divisant membre à membre par $(x-u)$, nous obtenons :

$$f(u) \le \frac{A(x)-A(u)}{x-u} \le f(x)$$

Passons à la limite en faisant tendre x vers u :

$$\lim_{x\to u} f(u) \le \lim_{x\to u} \frac{A(x)-A(u)}{x-u} \le \lim_{x\to u} f(x) \quad (*)$$

Remarquons d'abord que $\lim\limits_{x\to u} \dfrac{A(x)-A(u)}{x-u} = A'(u)$ (définition du nombre dérivé).

Ensuite, comme f est continue : $\lim\limits_{x\to u} f(x) = \lim\limits_{x\to u} f(u) = f(u)$.

L'inégalité (*) s'écrit donc $f(u) \le A'(u) \le f(u)$ et le théorème du sandwich nous permet de déduire que $A'(u) = f(u)$.

Nous en concluons que

la fonction A est une primitive de la fonction f.

Nous admettrons que ce résultat est valable pour toutes les fonctions continues dans $[a,b]$.

Application au calcul d'une aire

Soit une fonction f positive dans l'intervalle $[a,b]$. Calculons l'aire de la surface limitée par le graphique de f, l'axe des abscisses et les droites verticales $x = a$ et $x = b$.

En vertu du résultat précédent, il faut résoudre l'équation différentielle $A'(x) = f(x)$ sous la condition $A(a) = 0$ (puisque $A(a)$ représente l'aire entre les abscisses a et … a).

Les solutions de cette équation sont les fonctions

$$A(x) = F(x) + c \qquad (1)$$

où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ c'est-à-dire $F'(x) = f(x)$.

Nous voulons l'aire entre les abscisses a et b , c'est-à-dire $A(b)$.

D'après (1) , nous avons $A(b) = F(b) + c$.

D'autre part, $A(a) = F(a) + c = 0$ et donc $c = -F(a)$.

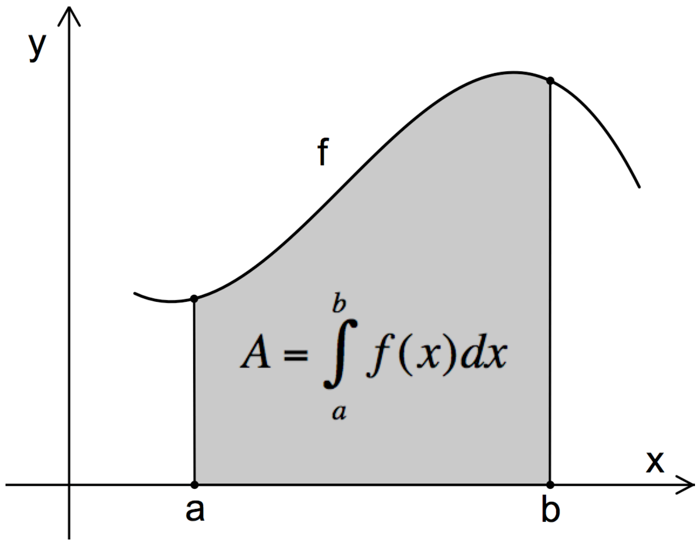
Finalement : $\boxed{A(b) = F(b) - F(a)}$.

Théorème fondamental du calcul intégral

Si f est une fonction continue et positive dans l'intervalle $[a,b]$, alors l'aire A de la surface limitée par le graphique de f, l'axe des abscisses et les droites verticales $x = a$ et $x = b$ est :

$$A = F(b) - F(a) \text{ où } F \text{ est une primitive de } f \; (\; F'(x) = f(x) \;) .$$

On note $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ et on appelle $\int_a^b f(x)dx$ l'*intégrale définie* de f entre $x = a$ et $x = b$.
Le réel a est la *borne inférieure* de l'intégrale définie, et le réel b est sa *borne supérieure*.



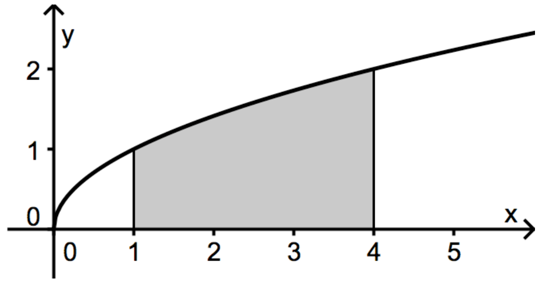
À présent, nous comprenons pourquoi LEIBNIZ a utilisé le symbole $\int$ (une « S » allongée) pour représenter l'intégrale. La lettre S, première lettre du mot *summa*, servait à l'origine à désigner la somme des indivisibles de CAVALIERI - ROBERVAL. Cette somme, qui permet d'évaluer des aires, est maintenant calculée à l'aide d'une intégrale.

Exemples de calculs d'aires

Exemple 1 : calculer l'aire de la surface délimitée par le graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.

Cette fonction est bien continue et positive dans l'intervalle $[1,4]$. Nous pouvons donc lui appliquer le théorème fondamental.

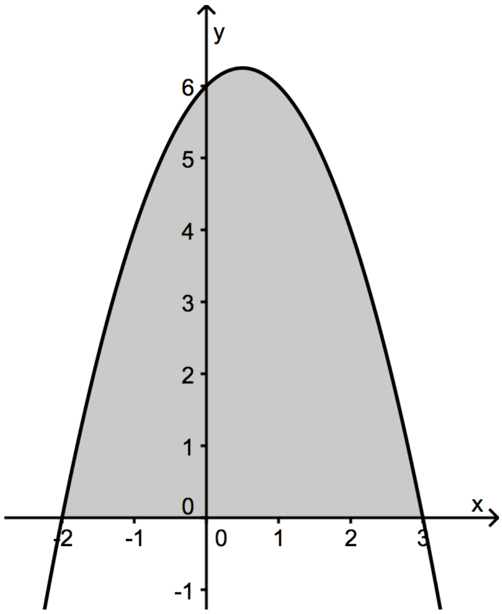
Soit A l'aire que nous souhaitons calculer, grisée sur le graphique. Nous avons :



$$A = \int_1^4 \sqrt{x} \cdot dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_1^4 = \frac{2}{3} \cdot \left(4^{3/2} - 1^{3/2} \right) = \frac{2}{3} \cdot (8 - 1) = \frac{14}{3} \approx 4{,}67(ua) .$$

Exemple 2 : calculer l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses et le graphe de la fonction $f(x) = -x^2 + x + 6$.

Il faut d'abord calculer les racines de f: $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$. Traçons ensuite le graphe de f .



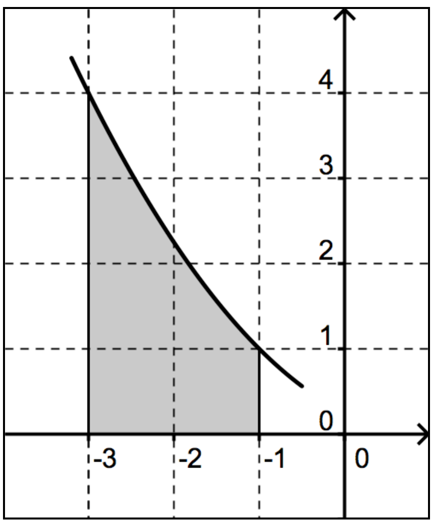
Cette fonction est continue et positive entre ses racines. Dans le cas présent, celles-ci sont aussi les bornes d'intégration. Nous pouvons donc appliquer le théorème fondamental.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{3} \left(-x^2 + x + 6\right) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-2}^{3} \\ &= \left(-9 + \frac{9}{2} + 18\right) - \left(\frac{8}{3} + 2 - 12\right) \\ &= \frac{125}{6} \approx 20{,}83(ua) \end{aligned}$$

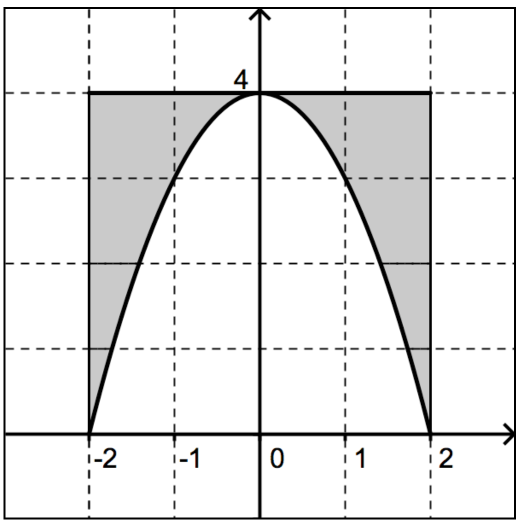
Calculs d'aires : exercices

Dans chacune des situations suivantes, calculer l'aire de la surface grisée.

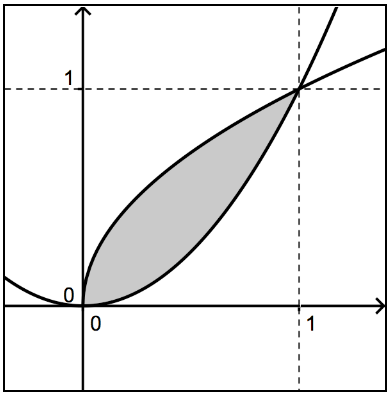
① $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{4}$



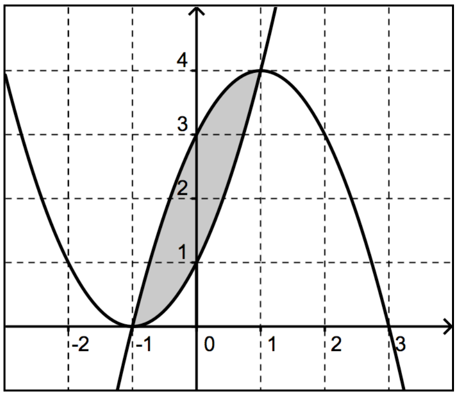
② $f(x) = -x^2 + 4$



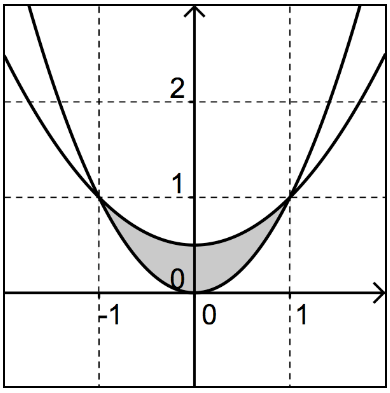
③ $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=x^2$



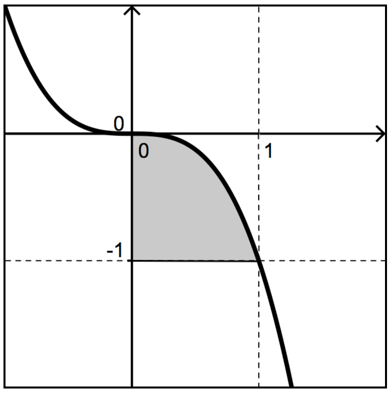
④ $f(x)=(x+1)^2$ et $g(x)=-x^2+2x+3$



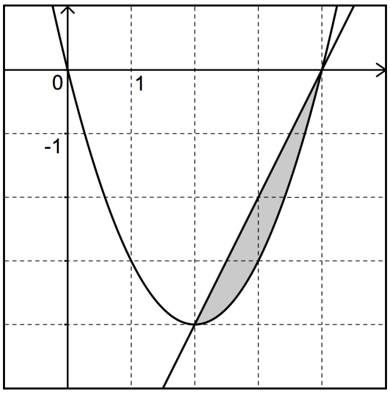
⑤



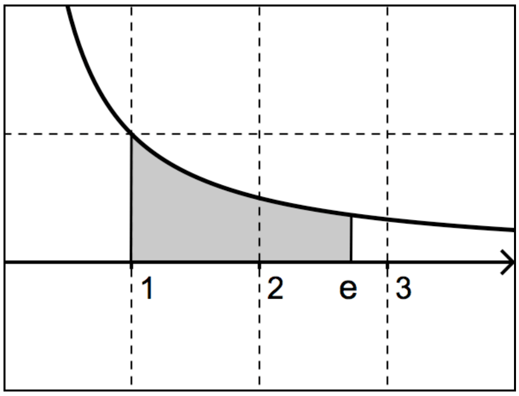
⑥ $f(x)=-x^3$



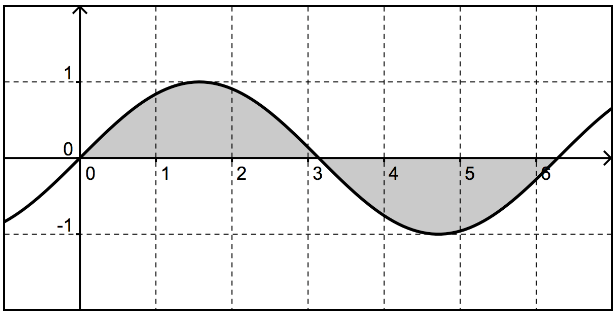
⑦ $f(x)=x^2-4x$ et $g(x)=2x-8$



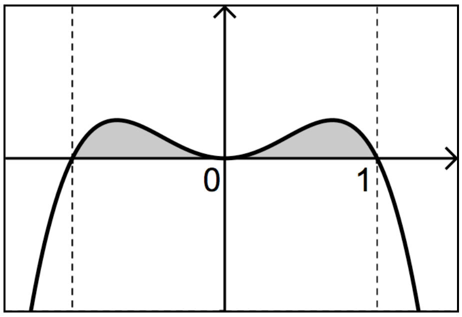
⑧ $f(x)=\dfrac{1}{x}$



⑨ $f(x)=\sin x$



⑩ $f(x)=-x^4+x^2$



3.5. Propriétés des intégrales définies

Dans ce qui suit, F désigne une primitive de la fonction f.

❶ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

En effet :

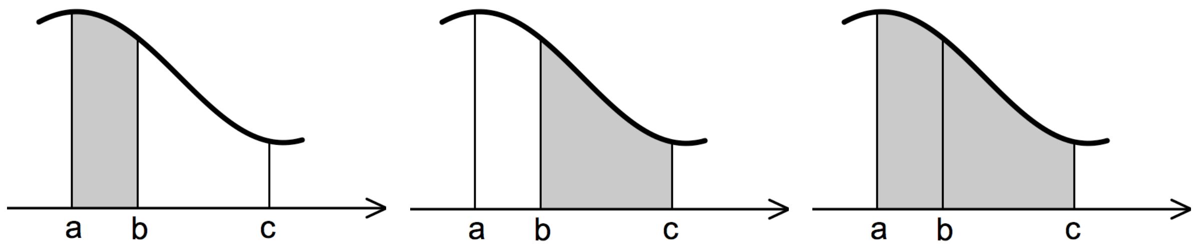
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -F(a) + F(b) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)dx$$

❷ $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

En effet :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = [F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)] = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx$$

Voici l'illustration graphique de cette propriété, dans le cas d'une fonction positive.



$$\int_a^b f(x)dx \quad + \quad \int_b^c f(x)dx \quad = \quad \int_a^c f(x)dx$$

❸ $\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$ (k étant une constante réelle)

En effet, si F est une primitive de f, alors $k.F$ est une primitive de $k.f$. Par conséquent :

$$\int_a^b k.f(x)dx = (k.F)(b) - (k.F)(a) = k.F(b) - k.F(a) = k.[F(b) - F(a)] = k.\int_a^b f(x)dx$$

❹ $\int_a^b (f \pm g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

En effet, si F et G sont des primitives respectives de f et g, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(x)dx &= (F+G)(b) - (F+G)(a)\\ &= F(b) + G(b) - F(a) - G(a)\\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a)\\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

3.6. L'intégrale définie est la limite d'une somme (intégrale de RIEMANN)

Rappelons-nous la méthode des rectangle vue au paragraphe 3.2. : pour une fonction f continue et positive dans l'intervalle $[a,b]$, l'aire A comprise entre la courbe de f, l'axe des x et les droites $x=a$ et $x=b$ est la limite de la somme des aires de n rectangles pour n tendant vers l'infini (les rectangles devenant de plus en plus fins mais aussi de plus en plus nombreux ; et comme les petits ruisseaux font les grandes rivières …) :

$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{i=n} f(a_i)\Delta x_i \quad \text{(avec } a_i \in [x_{i-1}, x_i] \text{ et } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}\text{)}.$$

Grâce au théorème fondamental, nous savons maintenant que $A = \int_a^b f(x)dx$. Donc :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{i=n} f(a_i)\Delta x_i}$$

Définie de cette façon, l'intégrale est appelée « intégrale de RIEMANN de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$ ».
L'intégrale de Riemann est utile dans bien d'autres contextes : calcul du volume d'un solide, du travail d'une force, de la longueur d'un arc de courbe …

RIEMANN

GAUSS

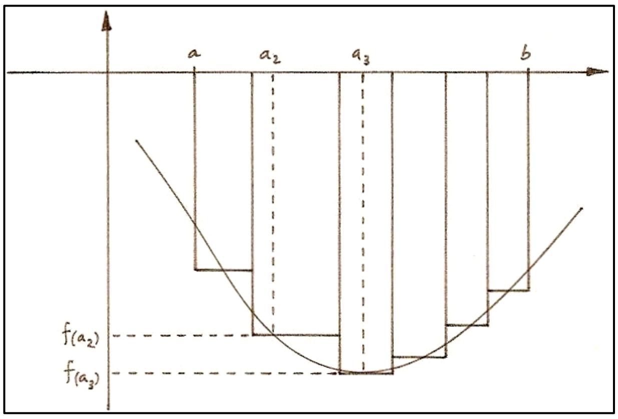
Bernhard RIEMANN (1826-1866), auteur de la définition de l'intégrale qui porte son nom, contribua largement à faire progresser d'autres domaines des mathématiques.
Il étudia notamment les fonctions d'une variable complexe et les fondements de la géométrie.
Les conceptions géométriques de RIEMANN fournirent à Albert EINSTEIN (1879-1955) un cadre adéquat pour sa théorie de la relativité générale.
Elève de Carl Friedrich GAUSS (1777-1875) à Göttingen, RIEMANN reçut les éloges de ce dernier, ce qui n'était vraiment pas courant : « créatif, actif, l'esprit vraiment mathématique, et une imagination extraordinairement fertile ».

3.7. Calculs d'aires : nouvelles situations

3.7.1. Cas d'une fonction négative dans l'intervalle $[a,b]$

La définition de l'intégrale de RIEMANN a été établie dans le cas d'une fonction positive dans l'intervalle $[a,b]$.

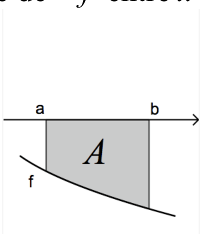
Dans cette définition, tous les nombres $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ sont strictement positifs car $x_i > x_{i-1}$.
D'autre part, si la fonction f est négative dans l'intervalle $[a,b]$, alors tous les $f(a_i)$ sont négatifs.



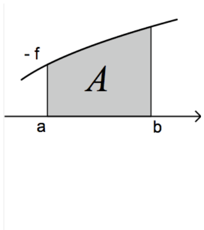
L'aire d'une surface étant un nombre positif, nous devons écrire :

$$\boxed{A = -\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n} f(a_i)\Delta x_i = -\int_a^b f(x)dx} .$$

Nous pouvons aussi tenir le raisonnement suivant : si f est négative dans l'intervalle $[a,b]$, alors la fonction $-f$ est positive dans ce même intervalle.
Comme les graphiques de f et de $-f$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, l'aire A déterminée par la courbe de f et l'axe des x est la même que celle déterminée par la courbe de $-f$ et l'axe des x . Il suffit donc de déterminer A en calculant l'intégrale définie de $-f$ entre $x = a$ et $x = b$.



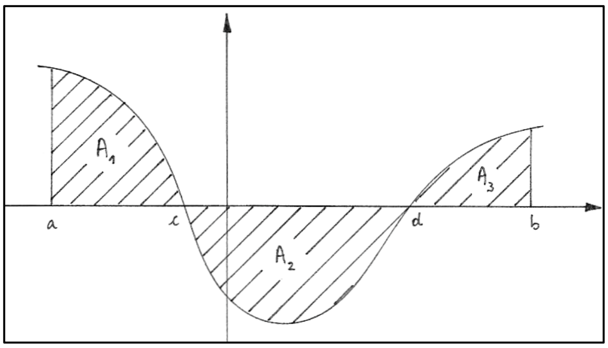
$$A = -\int_a^b f(x)dx$$



$$A = \int_a^b -f(x)dx$$

3.7.2. Cas d'une fonction qui change de signe dans l'intervalle $[a,b]$

Il faut alors décomposer l'intervalle $[a,b]$ en un minimum de sous-intervalles dans lesquels la fonction ne change pas de signe (il faut donc rechercher les racines de la fonction), calculer les aires correspondantes et additionner les résultats.
Dans le cas de la figure ci-contre, cela donne :



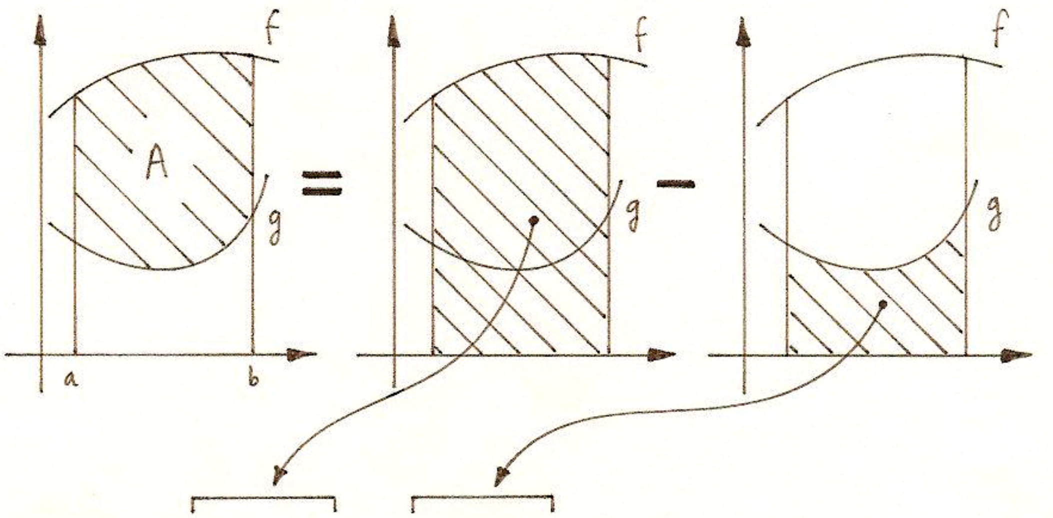
$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx .$$

3.7.3. Aire d'une surface comprise entre deux graphiques de fonctions

Si $\forall x \in [a,b] : f(x) \geq g(x)$, alors l'aire A de la surface comprise entre le graphique de f , celui de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est donnée par :

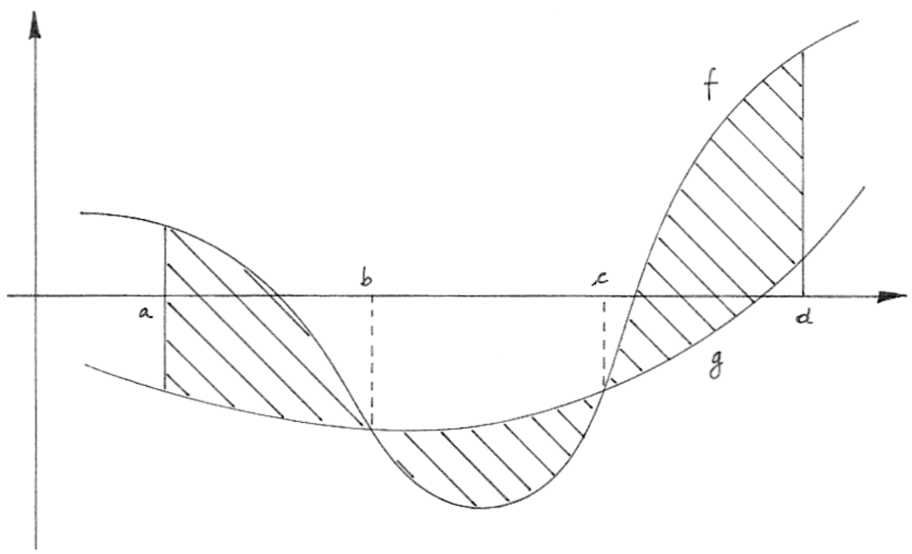
$$A = \int_a^b (f - g)(x)dx$$

Cet énoncé peut facilement se vérifier dans la situation suivante où l'on veut calculer l'aire A de la surface hachurée. On peut montrer que ce résultat est valable en général.



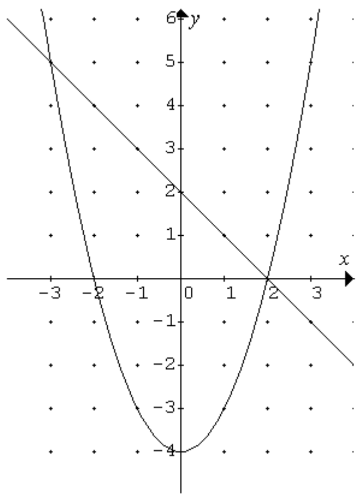
$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f - g)(x)\,dx \ .$$

Exercice : écrire les intégrales à calculer pour déterminer l'air hachurée ci-dessous.

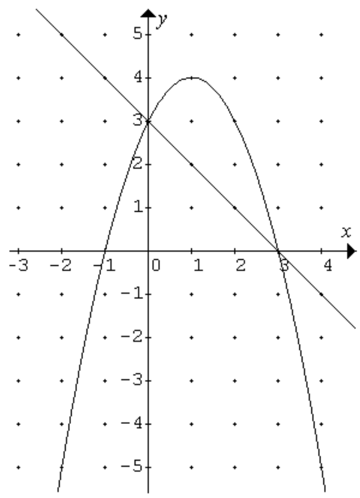


Exercice : dans chacun des cas suivants, après avoir déterminé l'expression analytique des fonctions représentées, calculer l'aire de la surface comprise entre ces deux fonctions.

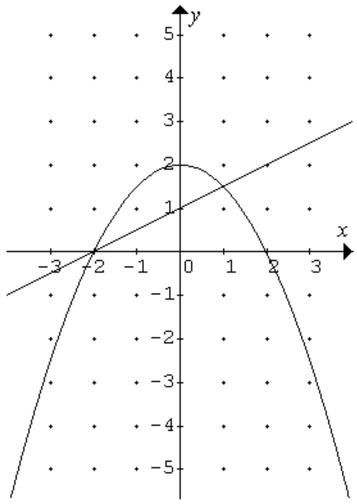
❶



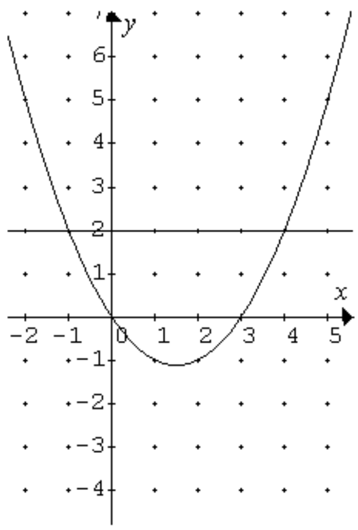
❷



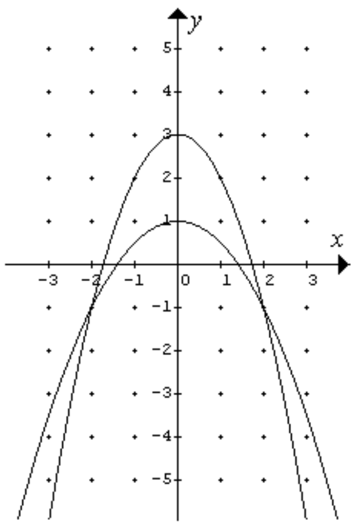
❸



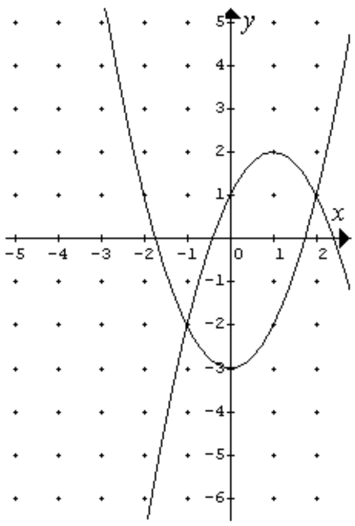
❹



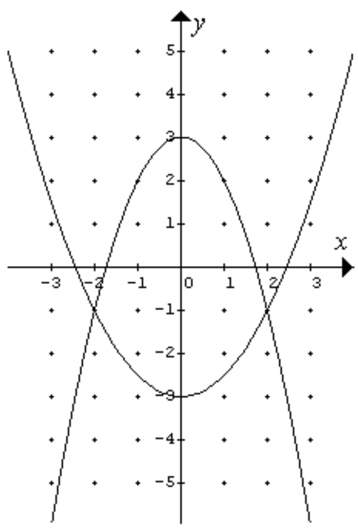
❺



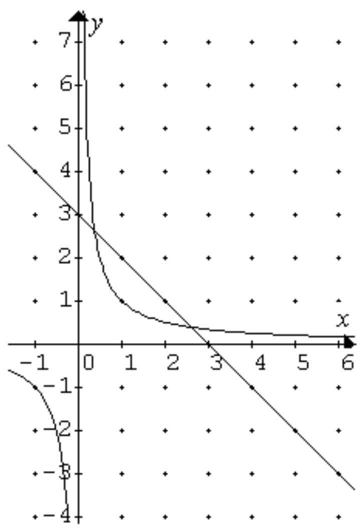
❻



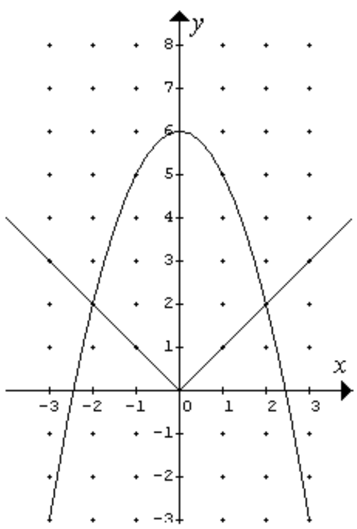
❼



❽

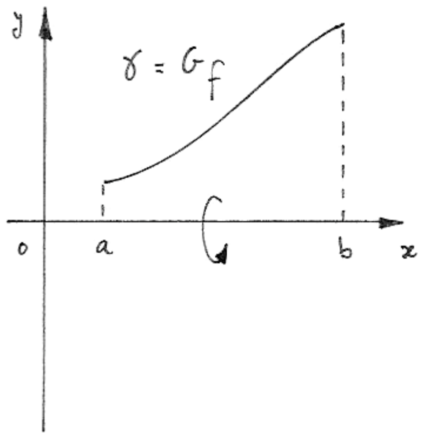


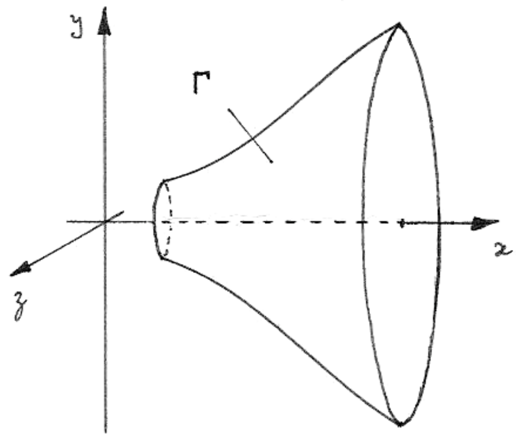
❾



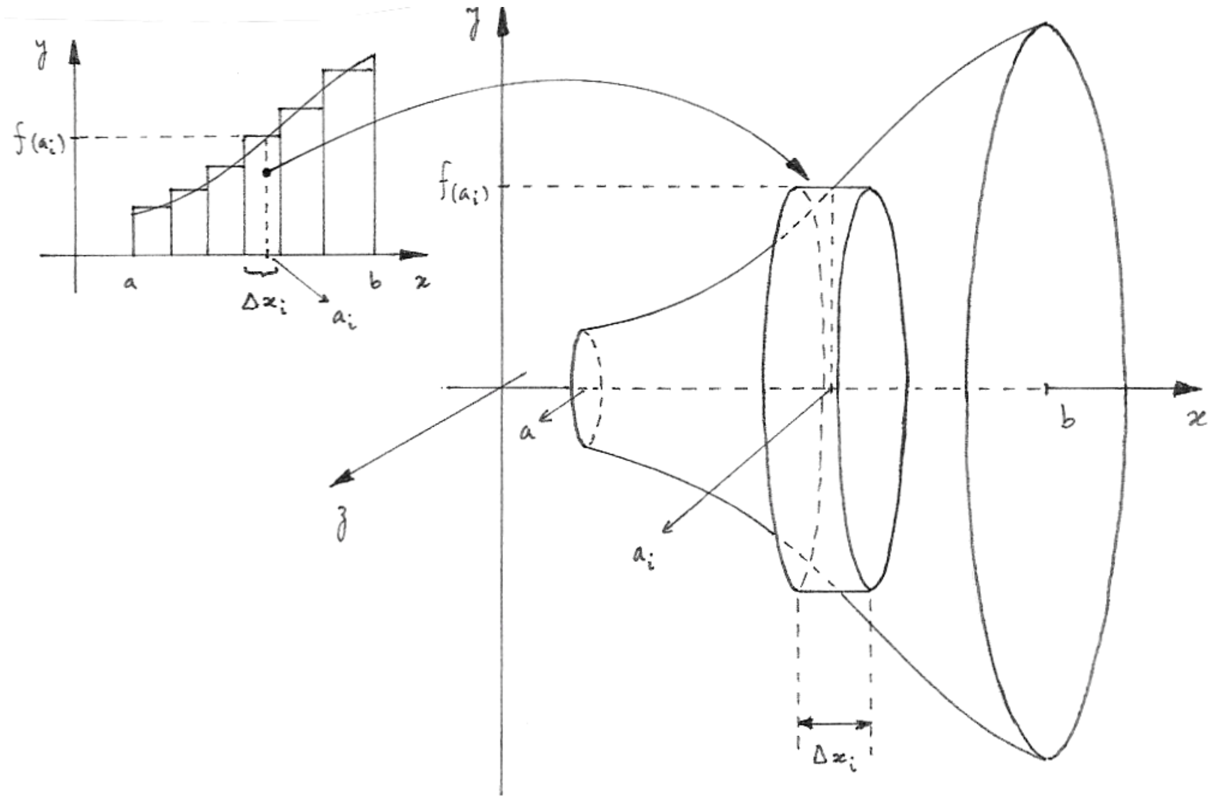
4. Volumes de solides de révolution

Considérons un arc de courbe plane γ (une partie du graphe d'une fonction f) . En faisant tourner γ autour de l'axe des abscisses, on engendre une surface Γ appelée surface de révolution. La surface Γ et les plans perpendiculaires à l'axe x comprenant les extrémités de l'arc γ délimitent un solide appelé « solide de révolution ».





Pour calculer le volume d'un tel solide, découpons-le en tranches cylindriques perpendiculaires à l'axe x . On peut considérer que chaque tranche est engendrée par la rotation autour de x d'un rectangle de base Δx_i et de hauteur $f(a_i)$ avec $a_i \in [x_{i-1}, x_i]$ (revoir la méthode des rectangles expliquée au paragraphe 3.2.)



Le volume d'une tranche vaut $\pi . f^2(a_i)\Delta x_i$. En effet, le rayon de la base du cylindre vaut $f(a_i)$ et la hauteur du cylindre vaut Δx_i .
On obtient le volume exact du solide en additionnant les volumes des tranches lorsque leur nombre tend vers l'infini.

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{i=n} \pi . f^2(a_i)\Delta x_i \quad \text{(avec } a_i \in [x_{i-1}, x_i] \text{ et } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}\text{)}$$

En vertu de la définition de l'intégrale de Riemann (paragraphe 4.6.), nous obtenons :

$$\boxed{V = \pi . \int_a^b f^2(x)dx}$$

Exercices

1. Calculer le volume du paraboloïde de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du graphique de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ entre $x = 0$ et $x = 4$.

---

2. Calculer le volume d'un cône de révolution de hauteur h et de rayon de base r .

---

3. Calculer le volume d'un tronc de cône de révolution de hauteur h et de rayons de bases r_1 et r_2 .

---

4. Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du graphique de la fonction f donnée.

   a) $f(x) = 2x + 1$ entre $a = 0$ et $b = 2$

   b) $f(x) = e^x$ entre $a = -1$ et $b = 2$

   c) $f(x) = x^2$ entre $a = -1$ et $b = 1$

---

5. Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la surface comprise entre les graphiques des fonctions f et g données.

   a) $f(x) = 3$ et $g(x) = 4 - x^2$

   b) $f(x) = 2 - x$ et $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

   c) $f(x) = x^2$ et $f(x) = 4 - x^2$