Fonctions exponentielles et logarithmiques

« Ces fonctions sont d'une importance considérable en mathématique et ont des applications dans presque tous les domaines de l'investigation humaine. Elles se révèlent particulièrement utiles dans les domaines de la chimie, de la biologie, de la physique et des sciences de l'ingénieur, où elles contribuent à décrire la croissance ou la décroissance de certaines quantités de la nature. Comme nous le verrons dans ce chapitre, il y a une relation étroite entre la fonction exponentielle et la fonction logarithmique : l'une est la fonction réciproque de l'autre. »

SWOKOWSKI et COLE,
« Algèbre et trigonométrie (avec géométrie analytique) », De Boeck Université.

---

1. Variation linéaire et variation exponentielle en fonction du temps

Lorsqu'on observe l'évolution dans le temps d'une certaine grandeur (la taille d'un animal, le nombre d'individus dans une population, la croissance d'un capital, etc.), on peut rencontrer différents types de variations parmi lesquelles la variation linéaire et la variation exponentielle. Cette variation peut être une croissance ou une décroissance.

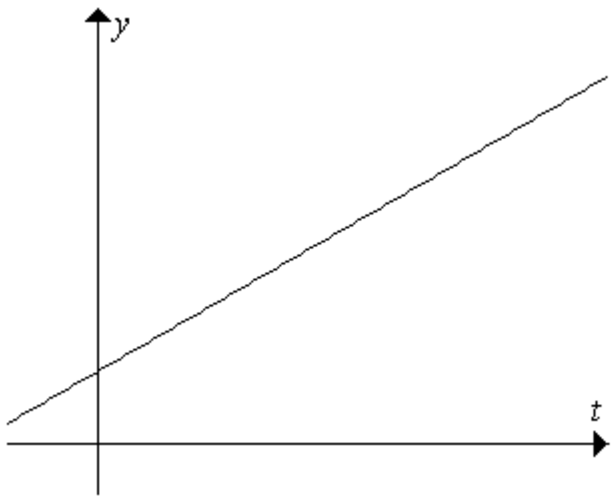
1.1. Variation linéaire

Définition : la grandeur y varie de façon linéaire si, pour un même accroissement de temps Δt , la grandeur y varie toujours d'une même quantité Δy .

Une autre façon d'exprimer cela est de dire que pour des intervalles de temps égaux, la différence entre la valeur finale et la valeur initiale de y est constante.

Tableau de nombres et graphique

t (temps)	y
0	p
Δt	$p+\Delta y$
$2\cdot\Delta t$	$p+2\cdot\Delta y$
$3\cdot\Delta t$	$p+3\cdot\Delta y$
$4\cdot\Delta t$	$p+4\cdot\Delta y$
…	…



La grandeur y est une fonction du premier degré du temps : $y = m\cdot t + p$.

Notons que $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ est le taux d'accroissement de y (il est constant et correspond à la pente de la droite) tandis que p est la valeur initiale de y .

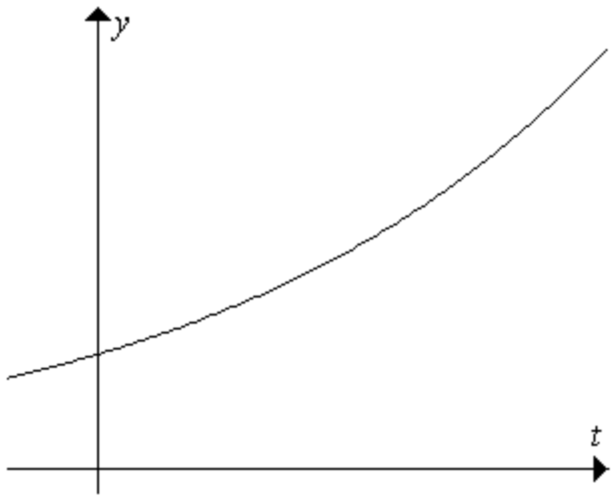
1.2. Variation exponentielle

<u>Définition</u> : la grandeur y varie de façon exponentielle si, pour un même accroissement de temps Δt , elle est toujours <u>multipliée</u> par une même quantité a .

Une autre façon d'exprimer cela est de dire que pour des intervalles de temps égaux, le quotient de la valeur finale par la valeur initiale de y est constant.

Tableau de nombres et graphique

t (temps)	y
0	k
Δt	$k \cdot a$
$2 \cdot \Delta t$	$k \cdot a^2$
$3 \cdot \Delta t$	$k \cdot a^3$
$4 \cdot \Delta t$	$k \cdot a^4$
…	…



La grandeur y est une fonction exponentielle du temps : $y = k \cdot a^t$.

Nous appellerons a le <u>facteur de croissance</u> (c'est aussi la <u>base</u> de l'exponentielle) tandis que k est la <u>valeur initiale</u> de y .

1.3. Taux de variation moyen

Variation linéaire

Dans ce cas, le taux de variation moyen de la fonction y est <u>constant</u> ; c'est aussi le taux de variation instantané et la pente de la droite qui représente la fonction.

Variation exponentielle

Calculons le taux de variation moyen de $y = k \cdot a^t$ entre les instants consécutifs t et $t + 1$:

$$TVM = \frac{y(t+1) - y(t)}{(t+1) - t} = \frac{k \cdot a^{t+1} - k \cdot a^t}{1} = k \cdot a^t \cdot (a-1) = y(t).(a-1)$$

Nous constatons que <u>le TVM est proportionnel à la valeur de *y(t)*</u> .
Concrètement, qu'est-ce que cela signifie ? Prenons une fonction exponentielle croissante. Plus la valeur de y est grande, plus le TVM sera grand. Donc, la croissance de cette fonction <u>s'accélère</u>. Qu'en serait-il d'une fonction exponentielle décroissante ?

La question du taux de variation instantané (dérivée) sera examinée plus loin.

Exercices

Variation linéaire ou variation exponentielle ?

Pour chacun des huit premiers exercices, on donne un tableau de nombres décrivant l'évolution d'une certaine grandeur dans le temps. Il est demandé de :

1° déterminer si cette variation est linéaire ou exponentielle
2° donner une formule permettant de calculer la grandeur concernée à un instant donné
3° réaliser les prévisions demandées

1. Un ressort de 70(cm) de long est suspendu verticalement. On y accroche différentes masses et on note les longueurs correspondantes du ressort.

Masse (en kilos)	0	0,49	0,98	1,47	1,96	2,45	2,94
Longueur (en cm)	70	71,5	73	74,5	76	77,5	79

Quelle longueur peut-on prévoir avec une masse de 4 kilos ?

2. Voici un tableau montrant l'évolution de la population du Maroc entre 1975 et 1981.

Année	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981
Population (en milliers)	17305	17826	18359	18906	19470	20050	20646

En supposant que cette population a poursuivi sa croissance au même rythme, calculer le nombre d'habitants du Maroc en 1950 et en 2005.
Comparer avec les résultats de l'ONU qui a dénombré 8953 milliers d'habitants en 1950 et 31478 milliers en 2005. Commenter.

3. Le thé vient d'être servi ! La température ambiante du salon est de 20(°C) et une personne décide de mesurer la température du thé toutes les 4 minutes. Voici les résultats.

Temps (en minutes)	0	4	8	12	16	20
Température (en °C)	95	81	68,5	58,5	49,5	42

Quelle sera la température du thé après 24 minutes ? Que valait-elle après 10 minutes ?

4. Une cuve de forme parallélépipédique contient du mazout de chauffage. La cuve est équipée d'une jauge extérieure. Dès le 1er novembre 2005, le propriétaire de l'installation décide de mesurer chaque semaine la hauteur indiquée par la jauge. Voici ses résultats.

Temps (en semaines)	0	1	2	3	4	5
Hauteur (en cm)	167	161,4	155,8	150,2	144,6	139

a) Quelle hauteur la jauge indiquera-t-elle après 9 semaines (le 2 janvier 2006) ?

b) La réserve de mazout est-elle suffisante pour chauffer l'habitation jusqu'au retour des beaux jours ? Disons … le 1er mai (après 26 semaines).

5. Un bébé mesure 44(cm) à sa naissance. Voici le tableau qui donne l'évolution de sa taille en fonction du temps.

Temps (en mois)	0	6	12	18	24	30
Taille (en cm)	44	50,6	57,2	63,8	70,4	77

Quelle sera la taille de l'enfant à 3 ans ? A 5 ans ? Quelle était sa taille à 15 mois ?

6. Voici des mesures de la concentration du dioxyde de carbone dans l'atmosphère entre 1972 et 1990. La concentration est exprimée en « parties par million » (ppm), c'est-à-dire le nombre de particules de CO_2 parmi un million d'autres particules.

Année	1972	1974	1976	1978	1980	1982	1984	1986	1988	1990
CO_2 (ppm)	327,3	330	332	335,3	338,5	341	344,3	347	351,3	354

Quelle aurait été la concentration de CO_2 en 2000 ? Quand dépassera-t-elle 400 (ppm) ?

7. Un détecteur est utilisé pour mesurer la radioactivité d'un échantillon et l'évolution de cette activité au cours du temps. La mesure est basée sur le nombre d'impulsions par minute que reçoit le détecteur. Voici les résultats obtenus.

Temps (jours)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270
Activité (impulsions par minute)	1000	869	797	701	571	474	417	348	291	262

   a) Quelle sera l'activité de l'échantillon après une année (360 jours) ?

   b) Après combien de jours l'activité n'était-elle plus que la moitié de celle de départ ?

8. Un étudiant en psychologie doit lire « Crimes et Châtiments » de Dostoïevski et réaliser un travail sur ce roman pour le 16 novembre. Pressé par le temps, il note chaque jour le nombre de pages qu'il lui reste à lire. Voici ce qu'il a noté jusqu'à présent :

Temps (en jours)	0	1	2	3	4	5
Nombre de pages restantes	910	860	807	759	710	660

Sachant qu'il a commencé à lire le 1er novembre, aura-t-il terminé sa lecture et son travail pour l'échéance ?

Questions relatives à des variations exponentielles

9. Un éleveur vient d'acheter un poulain de 60 kilos. Le poids du jeune cheval devrait augmenter régulièrement de 15% par mois. Si cette hypothèse se vérifie,

   a) quel sera son poids dans 6 mois ?

   b) déterminer l'expression analytique de la fonction qui donne le poids de l'animal (en kilos) en fonction du temps (en mois).

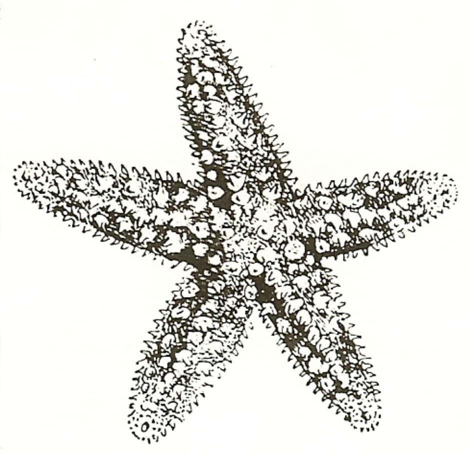
10. Un capital de 2500,00 € est placé sur un compte d'épargne offrant un taux d'intérêt de 4,25 % l'an …
Il s'agit d'intérêts composés, c'est-à-dire que les intérêts obtenus après un an produisent eux-mêmes des intérêts l'année suivante et ainsi de suite.
A combien s'élèvera le capital dans 5 ans si le taux ne change pas ?

11. Avec un taux d'intérêt de 2,5 % l'an, quel capital faut-il placer à intérêts composés pour obtenir, dix ans après, une somme de 5000,00 € ?

12. Une étoile de mer mesure 2(cm) de diamètre le 31 juillet. Son diamètre augmente de 25% tous les 10 jours jusqu'au 9 octobre inclus.

    a) Déterminer l'expression analytique de la fonction qui donne le diamètre de l'astérie (en cm) en fonction du temps (en nombre de périodes de 10 jours).

    b) Voici l'animal représenté en vraie grandeur le 12 septembre.
    Vérifier si ses dimensions correspondent à ce que la fonction déterminée au point (a) permettait de prévoir.



Faisons le point …

Nous savons que si une grandeur y, de valeur initiale y_0, croît de façon exponentielle, cette croissance est décrite par la relation

$$y = y_0 \cdot a^t$$

où a est le facteur de croissance et t le nombre d'unités de temps écoulées depuis l'instant initial.

D'après les exercices précédents, nous pouvons dire que si une grandeur y, de valeur initiale y_0, croît de r % par unité de temps, sa croissance est exponentielle et décrite par la relation

$$y = y_0 \cdot (1 + \frac{r}{100})^t$$

Le facteur de croissance est $a = 1 + \frac{r}{100}$.

13. La population d'une ville varie de façon exponentielle et son facteur de croissance annuel vaut $1{,}02$. Quel est le taux de croissance annuel de cette population ?

14. Une population de bactéries possède un taux de croissance journalier de 30% .
Quel est le facteur de croissance correspondant ? Et si le taux était de 120% ?

15. Une population de microbes triple tous les jours.

    a) Quels sont ses facteur de croissance et taux de croissance journaliers ?

    b) Et les facteur et taux de croissance hebdomadaires ?

16. Sachant que le facteur de croissance d'une population de microbes vaut 2 pour une période de 20 minutes, déterminer le facteur de croissance pour une période de

    a) 1 heure

    b) 10 minutes

    c) 5 minutes

17. Le facteur de croissance du diamètre d'une étoile de mer, pour une période de 10 jours, vaut $1{,}25$. Déterminer le facteur de croissance pour une période

    a) de 20 jours

    b) de 5 jours

18. Un certain type de bactérie voit sa population tripler toutes les 20 minutes.
A l'instant $t = 0$, il y a 50 bactéries.

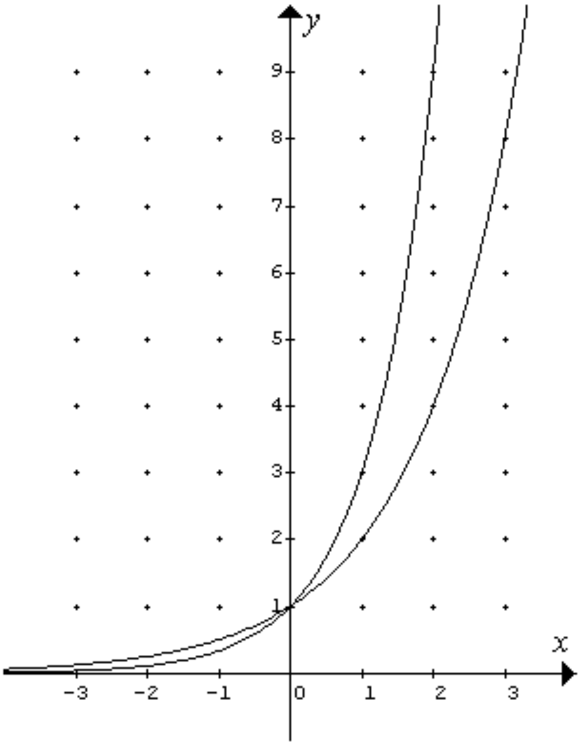
    a) Déterminer l'expression analytique de la fonction qui donne le nombre N de bactéries en fonction du nombre t de périodes de 20 minutes écoulées depuis le début de l'observation.

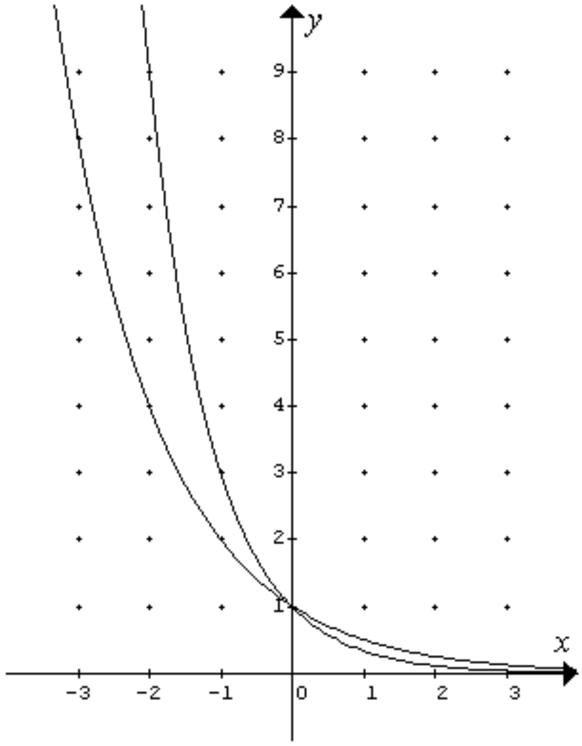
    b) Que devient cette expression si t représente le nombre d'heures au lieu du nombre de périodes de 20 minutes ?

2. Fonctions exponentielles

Définition : une fonction exponentielle est une fonction définie par $f(x) = a^x$ où a est un nombre réel strictement positif différent de 1, appelé base de l'exponentielle.

Exemples : $f(x) = 2^x$ et $g(x) = 3^x$ (à gauche) ; $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ et $i(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ (à droite).





x	2^x	3^x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$
-3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$	8	27
-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	4	9
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	2	3
0	1	1	1	1
1	2	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
2	4	9	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$
3	8	27	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$

Propriétés

> Soit une fonction exponentielle $f(x) = a^x$
>
> - Son domaine de définition est l'ensemble R (voir explications ci-dessous)
> - Son ensemble des images est R_0^+
> - Son graphique comprend toujours les points $(0,1)$ et $(1,a)$
> - Lorsque $a > 1$: la fonction est strictement croissante dans R et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;
>   on a aussi $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ (asymptote horizontale $y = 0$ pour $x \to -\infty$).
> - Lorsque $0 < a < 1$: la fonction est strictement décroissante dans R et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (asymptote horizontale $y = 0$ pour $x \to +\infty$) ; on a aussi $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Remarques

1° Pourquoi faut-il que la base a de l'exponentielle soit un nombre réel strictement positif et différent de 1 ?

- Si a était négatif, certaines puissances de a n'existeraient pas.
  Par exemple, si $a = -2$, la fonction $f(x) = (-2)^x$ ne serait pas définie pour x = ½ car $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ n'existe pas.
- Si $a = 0$, la fonction $f(x) = 0^x$ ne présente aucun intérêt (elle n'est définie que pour les réels strictement positifs et elle vaut alors 0).
- Si $a = 1$, la fonction $f(x) = 1^x$ n'est autre que la fonction constante $f(x) = 1$.

2° Une fois que la condition $a \in R_0^+ \setminus \{1\}$ est respectée, comment justifier que le domaine de définition de $f(x) = a^x$ est R ?

Considérons par exemple la fonction $f(x) = 2^x$. Nous connaissons la signification des exposants rationnels d'un nombre, les rationnels étant les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers :

$$2^3 = 8 \quad , \quad 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \quad , \quad 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \quad , \quad 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8} \quad , \quad 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \text{ etc.}$$

Mais qu'en est-il si l'exposant est irrationnel (impossible à écrire sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers), par exemple $x = \pi$?

Nous admettrons que le réel 2^π existe et qu'il est possible de l'approcher d'aussi près que l'on veut en l'encadrant par deux puissances rationnelles de 2 .
Ceci est illustré par une suite d'inégalités obtenues en sachant que $\pi = 3{,}141592654....$ et que la fonction $f(x) = 2^x$ est croissante.

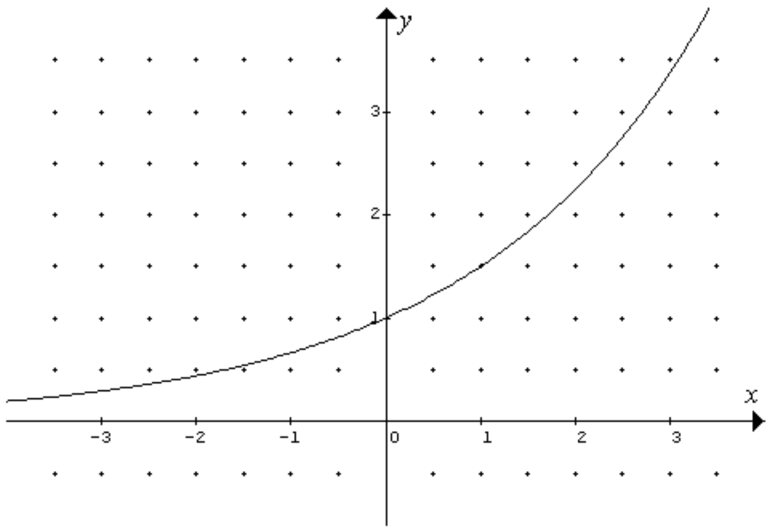
$3 < \pi < 4$	donc	$2^3 < 2^\pi < 2^4$
$3{,}1 < \pi < 3{,}2$	donc	$2^{3,1} < 2^\pi < 2^{3,2}$
$3{,}14 < \pi < 3{,}15$	donc	$2^{3,14} < 2^\pi < 2^{3,15}$
$3{,}141 < \pi < 3{,}142$	donc	$2^{3,141} < 2^\pi < 2^{3,142}$ etc.

De la même façon, nous pouvons admettre que toute puissance irrationnelle de 2 existe.
La conséquence en est que toute puissance réelle de 2 existe et que dom $f = \mathbb{R}$.
Il en va de même pour toute autre fonction exponentielle.

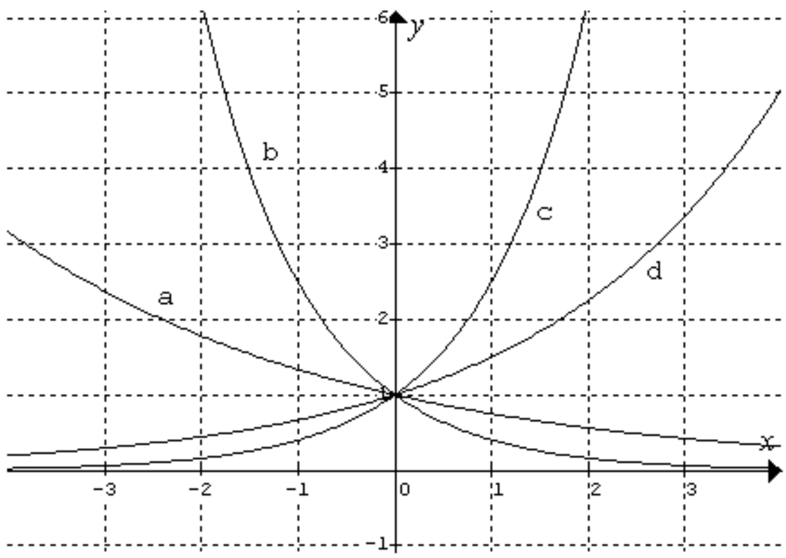
Exercices

1. Voici le graphique d'une fonction $f(x) = a^x$. Que peut-on dire de a ?

   Tracer sur le même diagramme le graphique de la fonction $g(x) = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$. Expliquer.



2. Voici les graphiques des fonctions exponentielles a^x , b^x , c^x et d^x .
   Classer les nombres réels a , b , c , d et 1 dans un ordre croissant.



3. La fonction exponentielle de base « e » (exponentielle népérienne)

3.1 Un peu d'algèbre financière (calculs d'intérêts)

- L'intérêt simple

Supposons qu'une somme de 5000 € soit placée sur un compte bancaire au taux d'intérêt simple de 3% l'an pendant 5 ans.
A combien s'élèvera le capital à l'échéance ?

Le taux de 3% signifie qu'une somme de 100 € produit 3 € d'intérêts en un an.

Une somme de 5000 € produira donc $5000 \,.\, \frac{3}{100} = 150$ € d'intérêts et le capital au bout d'un an s'élèvera à 5150 € (ceci s'obtient aussi en faisant 5000 x 1,03).

Comme il s'agit d'intérêt simple, pour chacune des années suivantes, l'intérêt se calcule toujours sur la somme de départ, soit 5000 € .
Chaque année rapporte donc le même montant en intérêts : 150 € .

Après 5 ans, le capital s'élèvera donc à $5000 + 150 \,.\, 5 = 5750$ € .

On peut généraliser. Si le taux est de r % l'an : $5000 + 5000 \,.\, \frac{r}{100} \,.\, 5$.

Généralisons davantage : au lieu de 5000 € , soit $C(0)$ le capital de départ, et au lieu de 5 ans, soit n le nombre d'années. Le capital $C(n)$ après n années est alors donné par :

$$\boxed{C(n) = C(0) + C(0) \cdot \frac{r}{100} \cdot n}$$

Dans le cas de l'intérêt simple, nous pouvons noter que la croissance du capital dans le temps est linéaire avec un taux d'accroissement égal à $C(0) \cdot \frac{r}{100}$.

- L'intérêt composé

Supposons qu'une somme de 5000 € soit placée sur un compte bancaire au taux d'intérêt composé de 3% l'an pendant 5 ans.
A combien s'élèvera le capital à l'échéance ?

Pour la première année, rien ne change par rapport à l'exemple précédent. Le capital au bout d'un an s'élève donc à 5000 x 1,03 = 5150 € .

Il s'agit maintenant d'intérêts composés. Cela signifie qu'à la fin de chaque période (de chaque année dans le cas présent), les intérêts s'ajoutent au capital pour produire eux-mêmes des intérêts au cours des périodes suivantes.

Ainsi, à la fin de la deuxième année, le capital s'élève à 5150 x 1,03 = 5304,50 € .
Ce montant s'obtient aussi en remarquant que le capital de départ a été multiplié par 1,03 deux fois de suite : $5000 \times 1{,}03^2 = 5304{,}50$ € .

De cette manière, nous aurons successivement :

- à la fin de la troisième année : $5000 \text{ x } 1{,}03^3 \approx 5463{,}64$ €
- à la fin de la quatrième année : $5000 \text{ x } 1{,}03^4 \approx 5627{,}54$ €
- à la fin de la cinquième année : $5000 \text{ x } 1{,}03^5 \approx 5796{,}37$ €

On peut généraliser. Si le taux est de $r\,\%$ l'an : $5000 \cdot (1+\frac{r}{100})^5$.

Généralisons davantage : au lieu de 5000 € , soit $C(0)$ le capital de départ, et au lieu de 5 ans, soit n le nombre d'années. Le capital $C(n)$ après n années est alors donné par :

$$\boxed{C(t) = C(0) \cdot (1+\frac{r}{100})^n}$$

Dans le cas de <u>l'intérêt composé</u>, nous pouvons noter que la croissance du capital dans le temps est <u>exponentielle</u> avec un facteur de croissance égal à $1+\frac{r}{100}$.

Notons enfin que n peut désigner autre chose que des années (des mois par exemple) et que le taux r doit être adapté à la période choisie (taux mensuel par exemple).

<u>Exercice</u> : un capital de 3500 € est placé sur un compte bancaire au taux annuel de $2{,}75\%$. A combien s'élèvera le capital dans 10 ans dans le cas de l'intérêt simple ? Et dans le cas de l'intérêt composé ?

3.2. La croissance vertigineuse d'un capital (vers l'exponentielle de base « e »)

Imaginons un super capitaliste dont la fortune est placée au taux de … 100% l'an !

Après un an, son capital aura doublé, ce qui est bien sûr confirmé par la formule des intérêts composés :

$$C_{1an} = C(0)\cdot(1+\frac{100}{100})^1 = 2\cdot C(0)$$

Imaginons maintenant qu'au cours de la première année, les intérêts soient capitalisés chaque mois. Quel sera le capital après un an ?

Comme la période de capitalisation est le mois, il faut d'abord se demander quel est le taux mensuel qui correspond à un taux annuel de 100% .

Si 100 € rapportent 100 € en un an, alors ils rapportent $\frac{100}{12}$ € en un mois.

Nous avons donc un taux mensuel : $r_{mensuel} = \frac{100}{12}$.

Calculons maintenant l'évolution de ce capital, mois après mois :

$$C_{1mois} = C(0)\cdot(1+\frac{100/12}{100})^1 = C(0).(1+\frac{1}{12})^1 \approx 1{,}0833\cdot C(0)$$

$$C_{2mois} = C(0).(1+\frac{1}{12})^2 \approx 1{,}1736\cdot C(0)$$

$$C_{3mois} = C(0).(1+\frac{1}{12})^3 \approx 1{,}2714\cdot C(0)$$

… etc.

Exercice

Poursuivre et approfondir le travail entamé ci-dessus, c'est-à-dire :

a) Calculer le capital au bout d'un an dans le cas de la capitalisation mensuelle.

b) Imaginer une capitalisation journalière. Calculer le taux journalier correspondant à un taux annuel de 100% . Calculer le capital au bout d'un an (365 jours).

c) Calculer le capital au bout d'un an dans le cas d'une capitalisation après chaque heure !

d) Calculer le capital au bout d'un an dans le cas d'une capitalisation après chaque minute !

e) Il est possible de pousser le processus aussi loin que l'on veut … Essayer.

f) Reprendre tous les résultats obtenus précédemment pour le capital au bout d'un an.
Il est toujours égal au capital de départ $C(0)$ multiplié par un certain coefficient . Comment évolue ce coefficient ? Commenter.

3.3. Le nombre « e » et l'exponentielle népérienne

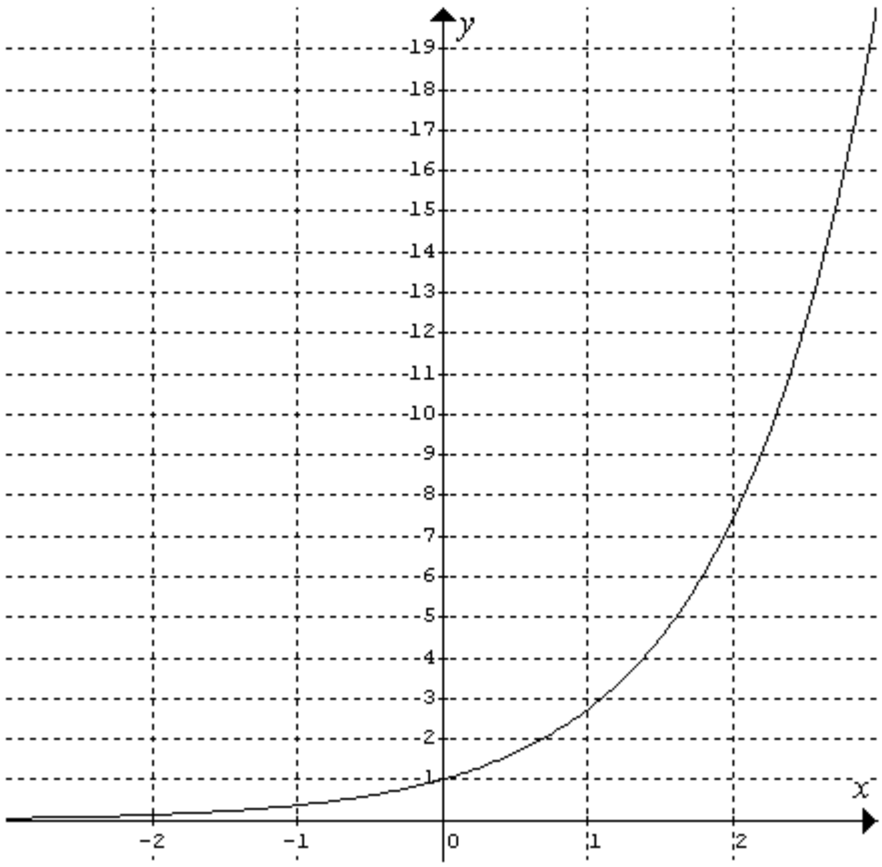
Le nombre « e » est défini par la formule

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Le nombre « e » est irrationnel ce qui signifie notamment que son écriture décimale est illimitée et non périodique.

$$\boxed{e \approx 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 0287\ \ldots}$$

L'exponentielle de base « *e* » , aussi appelée exponentielle népérienne en l'honneur du mathématicien Ecossais John Napier (1550-1617), est définie par $f(x) = e^x$.



Cette fonction possède bien sûr toutes les propriétés des fonctions exponentielles. Entre autres, comme $e > 1$, elle est strictement croissante dans R .
Son graphique comprend les points (0,1) et (1,e) et possède l'axe des abscisses comme asymptote horizontale lorsque $x \to -\infty$ (AH $\equiv y = 0$).

Les calculatrices scientifiques possèdent toutes une fonction permettant de calculer les valeurs de cette fonction : SHIFT e^x (Casio) ou 2nd e^x (Texas).

Ainsi : $e^2 \approx 7{,}3991$; $e^3 \approx 20{,}0855$; $e^{-1} \approx 0{,}3679$; $e^{-2} \approx 0{,}1353$, etc.

4. Logarithmes

4.1. Exemples et définitions

Exemple 1

Un certain type de bactérie a besoin de vingt minutes pour se diviser. En plaçant une telle bactérie dans un milieu suffisamment nutritif, combien de temps faudra-t-il pour observer 512 bactéries ?

Soit n le nombre de périodes de vingt minutes nécessaires. Il s'agit de résoudre l'équation

$$2^n = 512$$

Il faut donc déterminer l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever 2 pour obtenir 512. Cet exposant s'appelle le logarithme en base 2 de 512 .

On note : $n = \log_2 512$. Dans notre cas, on peut le trouver facilement : $n = 9$.

Exemple 2

Une population de bactéries comptant 1000 individus au départ croît de 15 % par jour. Dans combien de temps y aura-t-il 20000 bactéries ?

Soit n le nombre de jours (pas nécessairement entier !). Il faut résoudre l'équation :

$$20000 = 1000 \cdot 1{,}15^n$$

C'est-à-dire :

$$20 = 1{,}15^n$$

Il faut déterminer l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever 1,15 pour obtenir 20 . Cet exposant s'appelle le logarithme en base 1,15 de 20 .

On note : $n = \log_{1,15} 20$. Nous pouvons obtenir une valeur approximative de ce nombre en tâtonnant à l'aide d'une calculatrice ($n \approx 21{,}6$).
Nous verrons un moyen de calcul précis dans la suite de ce cours.

Définition : soit un réel a strictement positif et différent de 1 ; le logarithme en base a d'un nombre réel x est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever a pour obtenir x .

En langage symbolique, cela donne :

$$\boxed{\text{si } a \in R_0^+ \setminus \{1\} \text{, on a : } \log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x}$$

Quelques exemples

- $\log_2 8 = 3$ car $2^3 = 8$
- $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ car $3^{-2} = \frac{1}{9}$
- $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$ car $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

Remarques

Quelle que soit la base $a \in R_0^+ \setminus \{1\}$

- seuls les réels strictement positifs possèdent un logarithme de base a (car toute puissance de a étant strictement positive, si $x \leq 0$, il est impossible d'avoir $a^y = x$)
- $\log_a 1 = 0$ (car $a^0 = 1$)
- $\log_a a = 1$ (car $a^1 = a$)

Logarithmes particuliers

Les deux logarithmes les plus couramment utilisés se trouvent parmi les fonctions de toute calculatrice scientifique.

Logarithme décimal : il s'agit du logarithme en base 10 (touche « log »).

On le note simplement « log » et non « $\log_{10}$ ». Ainsi :

$\log 1000 = 3$	car	$10^3 = 1000$	
$\log 0{,}01 = -2$	car	$10^{-2} = 0{,}01$	
$\log 2500 \approx 3{,}39794$	car	$10^{3{,}39794} \approx 2500$	(calculatrice)

Logarithme népérien : il s'agit du logarithme en base e (touche « ln »).

On le note simplement « ln » et non « $\log_e$ ». Ainsi :

$\ln e^2 = 2$	car	$e^2 = e^2$	
$\ln \dfrac{1}{e} = -1$	car	$e^{-1} = \dfrac{1}{e}$	
$\ln 2500 \approx 7{,}82405$	car	$e^{7{,}82405} \approx 2500$	(calculatrice)

Exercices

1. Calculer les logarithmes suivants.

a) $\log_5 125$

b) $\log_2 \dfrac{1}{2}$

c) $\log_{\sqrt{2}} 2$

d) $\log_3 \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$

e) $\log_4 1024$

f) $\log_9 27$

g) $\log_2 8\sqrt{2}$

h) $\log_4 \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

i) $\log_4 32$

j) $\log_9 243$

k) $\ln(e\sqrt{e})$

l) $\ln \dfrac{1}{e^2}$

2. Déterminer le logarithme en base a des expressions suivantes ($a \in R_0^+ \setminus \{1\}$).

a) 1 c) a^3 e) $\sqrt{a}$ g) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

b) a d) $\dfrac{1}{a}$ f) $\sqrt[3]{a^5}$ h) $\dfrac{1}{a^2 \cdot \sqrt[3]{a}}$

---

3. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x ($a \in R_0^+ \setminus \{1\}$).

a) $\log_x 125 = 3$ e) $\log_x a = 1$

b) $\log_x 5 = 0{,}5$ f) $\log 10^{12} = x - 1$

c) $\log_2 x = 3$ g) $\log_x 2 = -2$

d) $\log_2 512 = x$ h) $\log_3 (x^2 + 1) = 2$

4.2. Propriétés des logarithmes

Quelques questions préalables

1. a) Dans chacun des cas suivants, calculer les logarithmes donnés et comparer le troisième résultat aux deux premiers.

   1° $\log_2 4$, $\log_2 8$ et $\log_2 32$
   2° $\log 100$, $\log 1000$ et $\log 100000$

   b) Quelle propriété peut-on imaginer ?

2. a) Dans chacun des cas suivants, calculer les logarithmes donnés et comparer le troisième résultat aux deux premiers.

   1° $\log_3 27$, $\log_3 3$ et $\log_3 9$
   2° $\log 1000$, $\log 100$ et $\log 10$

   b) Quelle propriété peut-on imaginer ?

3. a) Dans chacun des cas suivants, calculer les logarithmes donnés et comparer le troisième résultat aux deux premiers.

   1° $\log_3 9$ et $\log_3 81$
   2° $\log_3 9$ et $\log_3 729$

   b) Quelle propriété peut-on imaginer ?

4. Montrer par des contre-exemples que les « formules » suivantes sont **fausses** !

   a) $\log_a (x + y) = \log_a x + \log_a y$ b) $\log_a (x - y) = \log_a x - \log_a y$

Voici maintenant les vraies propriétés.

$\forall x, y \in R_0^+$ et $\forall a \in R_0^+ \setminus \{1\}$:

❶ $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

❷ $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

❸ $\log_a x^n = n \cdot \log_a x \quad (n \in R)$

<u>Démonstration de la propriété ❶</u>

Posons d'abord $\log_a x = p$. Cela signifie aussi que $a^p = x$ (1).
Posons ensuite $\log_a y = q$. Cela signifie aussi que $a^q = y$ (2).

Nous obtenons successivement (les justifications sont entre [...]) :

1er membre	=	$\log_a(x \cdot y)$	
	=	$\log_a(a^p \cdot a^q)$	[d'après (1) et (2)]
	=	$\log_a a^{p+q}$	[règle de calcul relatives aux puissances]
	=	$p + q$	[définition d'un logarithme]
	=	$\log_a x + \log_a y$	[voir ce qui a été posé au départ]
	=	2ème membre	

<u>Exercices</u>

1. Sur le modèle de la démonstration de la propriété ❶ , démontrer les propriétés ❷ et ❸ .

2. Sachant que $\log 2 \approx 0{,}3$ et que $\log 3 \approx 0{,}48$, donner une approximation des logarithmes suivants, sans utiliser la calculatrice.

a) $\log 6$ c) $\log 8$ e) $\log 24$ g) $\log \sqrt{3}$

b) $\log \dfrac{3}{2}$ d) $\log 9$ f) $\log 18$ h) $\log \dfrac{27}{4}$

4.3. Changement de base de logarithme

Imaginons que, dans un problème, nous soyons amenés à déterminer la valeur de

$$\log_{1,15} 2 \ .$$

Les calculatrices ne permettent pas d'obtenir directement la valeur du logarithme en base $1,15$ d'un nombre. Elles ne fournissent en effet que les logarithmes décimaux (« log ») et les logarithmes népériens (« ln »). C'est l'une de ces deux bases qu'il nous faudra utiliser pour parvenir à nos fins.

Problème général : calculer $\log_a x$ où a est une base quelconque.

Posons $\log_a x = y$. Nous avons donc $a^y = x$.

Soit maintenant b une autre base quelconque. Nous avons successivement :

$$\log_b a^y = \log_b x$$

$$y \cdot \log_b a = \log_b x \qquad \text{[propriété ❸ des logarithmes]}$$

$$y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Finalement,

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

La relation encadrée est dite « formule de changement de base de logarithme ».

Application : calcul de $\log_{1,15} 2$ ($a = 1,15$).

Si $b = 10$: $\log_{1,15} 2 = \dfrac{\log 2}{\log 1,15} \approx \dfrac{0,3010}{0,0607} \approx 4,9595$

Si $b = e$: $\log_{1,15} 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 1,15} \approx \dfrac{0,6931}{0,1398} \approx 4,9595$

Exercice

Calculer avec quatre décimales exactes :

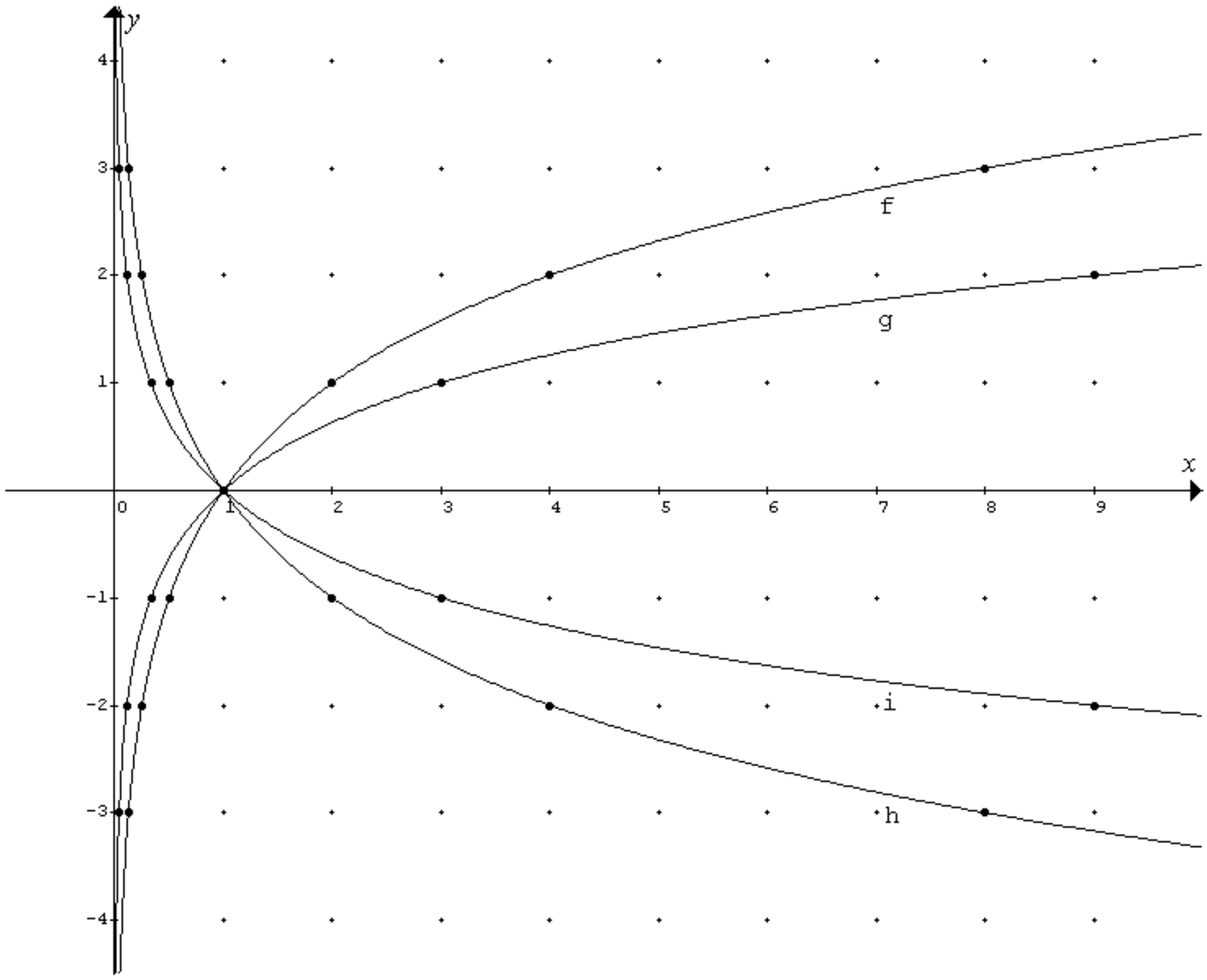
a) $\log_2 19$ b) $\log_3 \dfrac{1}{6}$ c) $\log_{0,5} 3$ d) $\log_{0,5} 0,8$ e) $\log_6 \dfrac{1}{36}$

5. Fonctions logarithmiques

Définition : une fonction logarithmique est une fonction définie par $f(x) = \log_a x$ où a est un nombre réel strictement positif différent de 1 , appelé base du logarithme.

Exemples (à comparer avec les fonctions exponentielles présentées à la page 7)

$f(x) = \log_2 x$ et $g(x) = \log_3 x$ (à gauche) ; $h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ et $i(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ (à droite).



x	$\log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

x	$\log_3 x$
$\frac{1}{27}$	-3
$\frac{1}{9}$	-2
$\frac{1}{3}$	-1
1	0
3	1
9	2
27	3

x	$\log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	1
2	-1
4	-2
8	-3

x	$\log_{\frac{1}{3}} x$
$\frac{1}{27}$	3
$\frac{1}{9}$	2
$\frac{1}{3}$	1
1	1
3	-1
9	-2
27	-3

Propriétés

Soit une fonction logarithmique $f(x) = \log_a x$ • Son domaine de définition est l'ensemble R_0^+ (en effet, seuls les nombres réels strictement positifs possèdent un logarithme ; voir explication page 15)   • Son ensemble des images est R • Son graphique comprend toujours les points $(1,0)$ et $(a,1)$ • Lorsque $a > 1$: la fonction est strictement croissante dans R_0^+ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; on a aussi $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ (asymptote verticale $x = 0$).   • Lorsque $0 < a < 1$: la fonction est strictement décroissante dans R_0^+ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; on a aussi $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ (asymptote verticale $x = 0$).

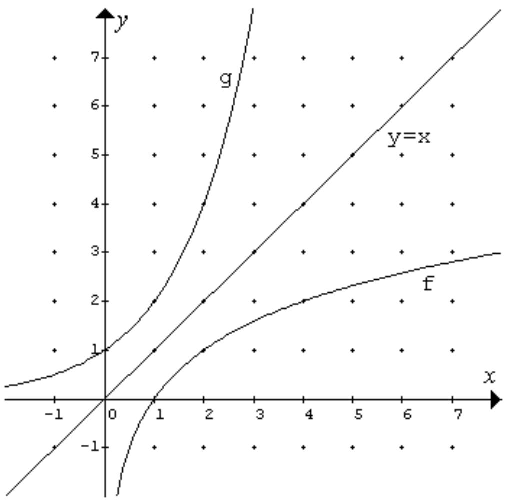
Lien entre fonctions logarithmiques et exponentielles

Soit $a \in R_0^+ \setminus \{1\}$. La fonction logarithmique de base a est la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base a .

Ainsi, les fonctions $f(x) = \log_2 x$ et $g(x) = 2^x$ sont réciproques l'une de l'autre.
D'une manière intuitive, on peut dire que si l'on cherche l'image d'un réel par f et que l'on cherche ensuite l'image du résultat obtenu par g , on est « ramené au point de départ ».
Par exemple, si $x = 8$: $f(8) = \log_2 8 = 3$ et $g(3) = 2^3 = 8$.
Cela fonctionne aussi dans l'autre sens.
Par exemple, si $x = 5$: $g(5) = 2^5 = 32$ et $f(32) = \log_2 32 = 5$

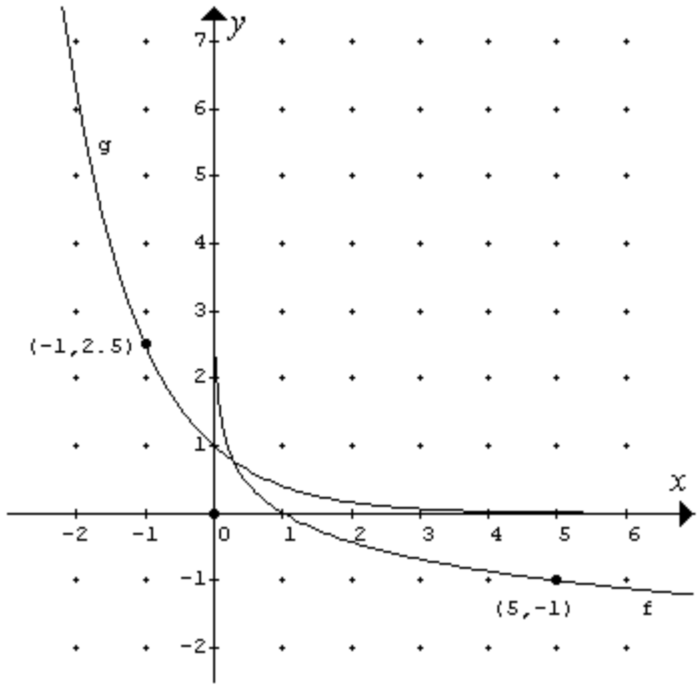
D'un point de vue graphique, dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de deux fonctions réciproques l'une de l'autre sont symétriques par rapport à la bissectrice du premier quadrant (la droite d'équation y = x)

Voici l'illustration de cette propriété pour $f(x) = \log_2 x$ et $g(x) = 2^x$.



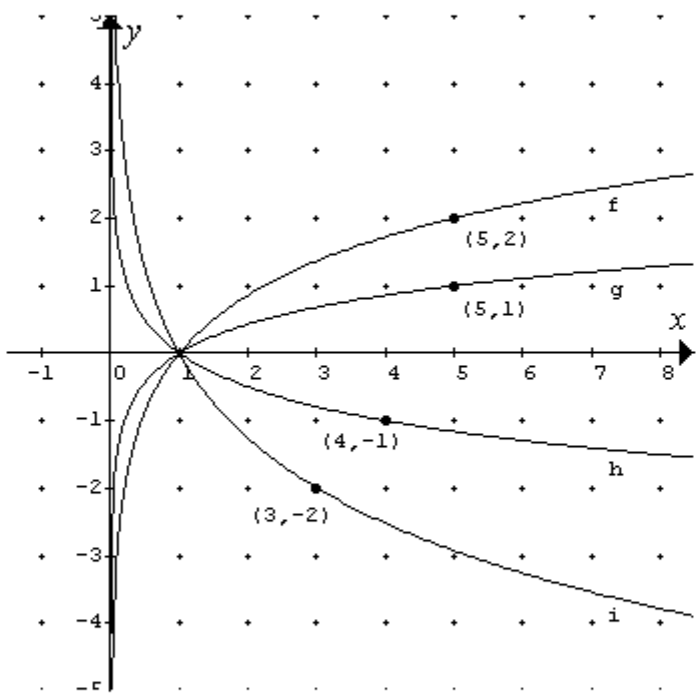
Exercices

1. Voici les graphiques de deux fonctions f et g. Laquelle est exponentielle et laquelle est logarithmique ? Déterminer l'expression analytique de chacune.



2. Le graphique d'une fonction logarithmique comprend le point (12.5 , 2). Donner une expression analytique de cette fonction.

3. Voici les graphiques des fonctions logarithmiques $f(x) = \log_a x$, $g(x) = \log_b x$, $h(x) = \log_c x$ et $i(x) = \log_d x$.
   Classer les nombres réels a , b , c , d et 1 dans un ordre croissant.



6. Equations exponentielles et logarithmiques

Les équations exponentielles, où l'inconnue intervient comme exposant, et les équations logarithmiques, où l'inconnue intervient dans l'expression d'un logarithme, apparaissent fréquemment dans les problèmes concernant les croissances exponentielles.

Voici quelques exemples.

Exemple 1 : résoudre l'équation $2000 = 500 \cdot 1{,}05^x$.

Solution

$$\frac{2000}{500} = 1{,}05^x$$

$$1{,}05^x = 4$$

$$x = \log_{1,05} 4 = \frac{\log 4}{\log 1{,}05} \approx 28{,}41$$

Exemple 2 : résoudre l'équation $4 \cdot 3^{4x} = 36$

Solution

$$3^{4x} = \frac{36}{4}$$

$$3^{4x} = 9$$

$$3^{4x} = 3^2$$

$$4x = 2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Exemple 3 : résoudre l'équation $3 \cdot \log_4(2 - x) = 6$

Solution

Déterminons d'abord le domaine de cette équation : pour que le logarithme qui s'y trouve existe, il faut que $2 - x > 0$ et donc que $\boxed{x < 2}$.

$$\log_4(2 - x) = \frac{6}{3}$$

$$\log_4(2 - x) = 2$$

$$2 - x = 4^2$$

$$x = -14$$

Cette solution est acceptable car - 14 < - 2 .

Exemple 4 : résoudre l'équation $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$

Solution

Déterminons d'abord le domaine de cette équation : pour que les logarithmes qui s'y trouvent existent, il faut simultanément que $x > 0$ et $x - 2 > 0$ ce qui revient à $\boxed{x > 2}$.

$$\log_2 x + \log_2(x-2) = \log_2 8$$

$$\log_2\left[x \cdot (x-2)\right] = \log_2 8$$

$$x \cdot (x-2) = 8$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

Cette équation du second degré a pour solutions $x = -2$ et $x = 4$. Vu la condition, seule la seconde solution peut être retenue. La première est à rejeter. Donc : S = { 4 } .

Exercices

1. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

Série 1

a) $2^x = 64$

b) $3^x = \sqrt{3}$

c) $2^x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

d) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x = \dfrac{4}{3}$

e) $3^x = \sqrt[3]{9}$

f) $2^x = 2 \cdot \sqrt[5]{16}$

g) $3^x = 9^{x+1}$

h) $4^x = \sqrt{32}$

i) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^x = \dfrac{16}{9}$

j) $27 \cdot 2^x = 8 \cdot 3^x$

Série 2

a) $10^x = 43{,}125$

b) $3^x = 5$

c) $145^x - 3451 = 0$

d) $3^x + 81 = 0$

e) $0{,}421^x = 73{,}55$

Série 3

a) $e^x - 1 = 0$

b) $e^x - 2 = 0$

c) $e^{2x} - e = 0$

d) $3 - 2 \cdot e^x = 0$

e) $e^x + 3 = 0$

f) $2x - x \cdot e^{3x} = 0$

Quelques équations logarithmiques. Préciser les conditions préalables.

Série 4

a) $2 \cdot \log_3 x = 18$

b) $\log_3(x-5) - 2 = 0$

c) $3 \cdot \log x = 6$

d) $\ln x - 4 = 0$

e) $2.\ln x + 1 = 0$

f) $3 \cdot \ln x = \ln 8$

g) $\log_x 9 = 2$

h) $4 \cdot \log x - 2 = 0$

i) $x \cdot \ln x - x = 0$

j) $\log_2(2x+3) = 4$

Série 5

a) $\log x - \log 4 + \log 5 = \log 25$

b) $\log(x+7) + \log 3 = \log 6$

c) $2 \cdot \log_2(x-2) = \log_2(3x-8)$

d) $2 \cdot \log(x-5) = \log 5 + \log(5-x)$

e) $\log x + \log(11-x) = \log 2x^2$

f) $\log_3 x + \log_3(3-x) = \log_3 7$

g) $\log_3(x+2) + 1 = \log_3(x^2 + 4x)$

h) $\log(x-5) + \log(x-2) = 1$

i) $3 \cdot \ln x - \ln 64 = 0$

j) $2 \cdot \ln x + \ln 2x = 1$

Quelques <u>inéquations</u> exponentielles et logarithmiques. Préciser les conditions préalables. S'aider d'un graphique pour la résolution (il est en effet important de savoir si l'on travaille avec une fonction croissante ou décroissante).

Série 6

a) $2^x < 8$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 8$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4$

d) $3^x < \frac{1}{9}$

e) $e^x > 1$

f) $2^x > 10$

g) $0{,}1^x > 1000$

h) $\log_2 x > 3$

i) $\log_{0,5} x < -1$

j) $\log x < 0$

k) $\ln x > 2$

l) $\ln x < -2$

---

2. Un capital de 2500 euros est placé au taux de 4% l'an. Dans combien de temps ce capital s'élèvera-t-il à 4000 euros ?

---

3. Un sapin augmente sa taille de 10% chaque année. Combien d'années lui faut-il pour doubler sa taille ? Tripler sa taille ?

---

4. La population d'une ville varie de manière exponentielle. On sait qu'en 2004 elle était de 135 426 habitants et qu'en 2005 elle était de 137 229 habitants.
Si la croissance continue au même rythme, en quelle année cette population dépassera-t-elle 200 000 habitants ?

---

5. En 1975, on dénombrait 800 millions d'habitants en Chine et 600 millions en Inde. La population augmentait au rythme de 1,7% par année en Chine et de 2,2% par année en Inde.
On prévoyait alors, si ces tendances se maintenaient, que les populations respectives des deux pays, t années après 1975, seraient données (en millions d'habitants) par les formules suivantes :

<u>Chine</u> : $C(t) = 800 \cdot e^{0,017 \cdot t}$ <u>Inde</u> : $I(t) = 600 \cdot e^{0,022 \cdot t}$

a) Quel devrait être l'écart entre les populations de ces deux pays en 2005 ?
Comparer avec les données officielles (de l'ONU par exemple).

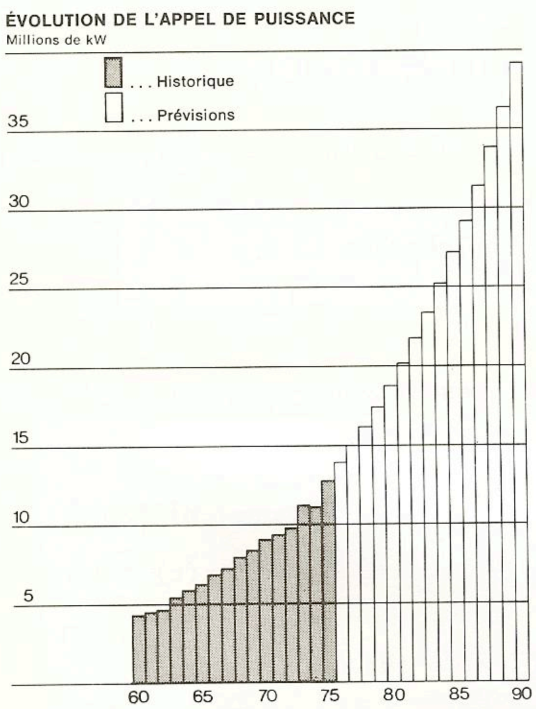
b) En quelle année y aurait-il autant d'Indiens que de Chinois ? Commenter.

c) Quelles formules auriez-vous utilisées pour décrire l'évolution des populations Indienne et Chinoise ? Sont-elles équivalentes à celles qui sont fournies ci-dessus ?

6. Le graphique de l'évolution de la demande de puissance électrique au Québec depuis 1960 (graphique de gauche) correspond à celui d'une fonction exponentielle d'équation

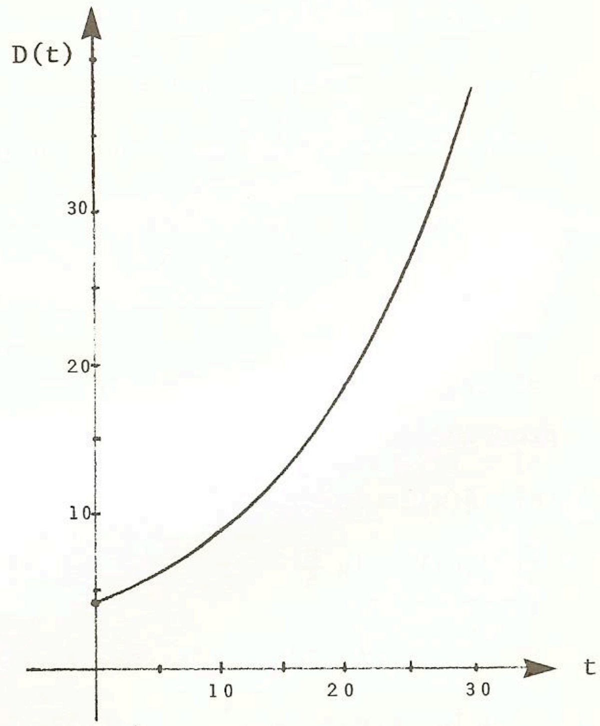
$$D(t) = 4{,}34 \cdot e^{0{,}073 \cdot t} \quad \text{(millions de kilowatts)}$$

où t représente le nombre d'années écoulées depuis 1960.



Cette courbe illustre l'évolution de la demande de puissance de 1960 à aujourd'hui et le prolongement de la même tendance évolutive dans le futur. Les besoins, on le voit, doublent tous les 9 ou 10 ans.

(Hydro-Québec)



a) A l'aide de la fonction D, calculer la demande de puissance en 1990.
   Comparer avec les prévisions de l'Hydro-Québec.

b) Selon l'Hydro-Québec, les besoins doublent tous les 9 ou 10 ans.
   Qu'en est-il selon la fonction D ?

c) Quelle serait la demande actuelle ?

---

7. La pression atmosphérique, en hectopascals, à une altitude de h mètres au-dessus du niveau de la mer peut être donnée approximativement par la formule

$$P(h) = 1014 \cdot e^{-0{,}000127 \cdot h}$$

a) Que vaut la pression atmosphérique au niveau de la mer ?

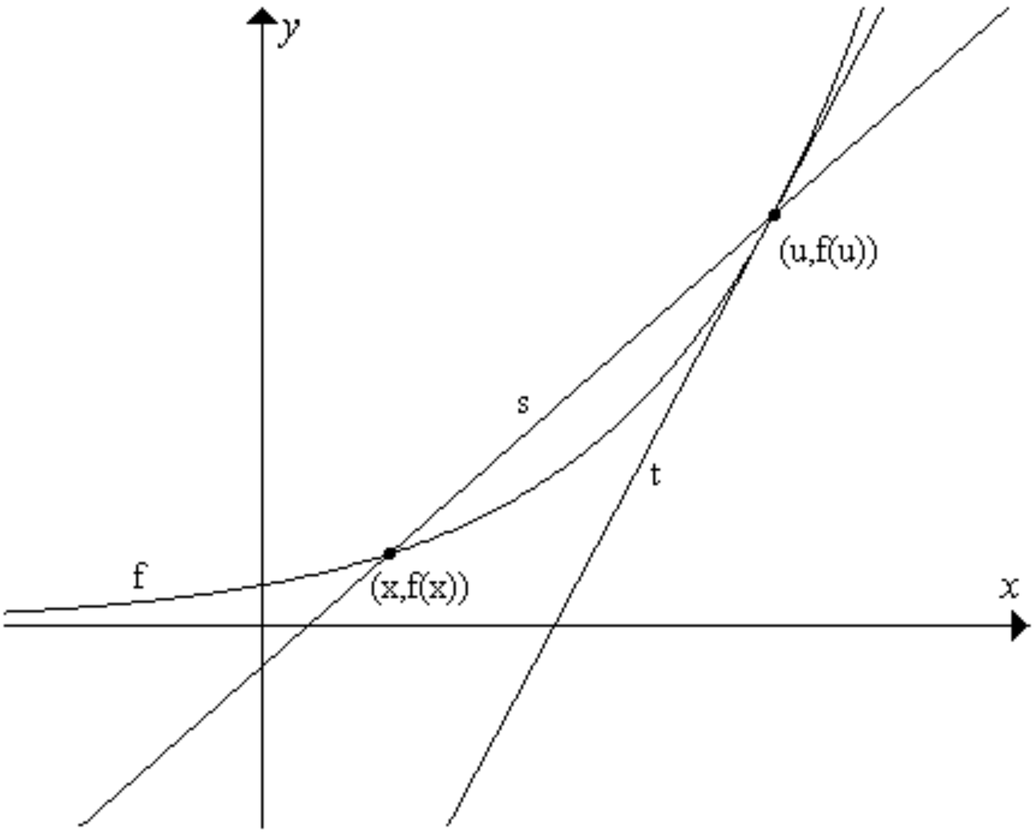
b) Que vaut la pression atmosphérique à 1000 (m) d'altitude ?

c) A quelle altitude la pression n'est-elle plus que de 692 (hPa) ?

7. Dérivées des fonctions exponentielles et logarithmiques

7.1. Nombre dérivé d'une fonction en un réel : rappel

Voici le graphique d'une fonction continue f.



Le nombre dérivé de la fonction f en un réel u est la pente de la tangente au graphique de f au point de coordonnées $(u, f(u))$.

Il s'agit donc de la pente de la droite t sur le graphique.

Pour calculer la pente de la tangente, l'idée est de commencer par calculer la pente d'une sécante s au graphique de f passant par les points $(u, f(u))$ et $(x, f(x))$.

Notons m_s cette pente. Nous avons : $m_s = \dfrac{f(x) - f(u)}{x - u}$.

Ensuite, la pente de la tangente, c'est-à-dire le nombre dérivé noté $f'(u)$, s'obtient en faisant tendre x vers u . Nous avons donc :

$$\boxed{f'(u) = \lim_{x \to u} \frac{f(x) - f(u)}{x - u}}$$

7.2. Dérivée d'une fonction du type $f(x) = a^x$

Utilisons la formule qui vient d'être rappelée pour calculer le nombre dérivé de la fonction $f(x) = a^x$ en un réel u :

$$f'(u) = \lim_{x \to u} \frac{f(x) - f(u)}{x - u}$$

$$= \lim_{x \to u} \frac{a^x - a^u}{x - u}$$

mettons a^u en évidence

$$= \lim_{x \to u} \frac{a^u \cdot (a^{x-u} - 1)}{x - u}$$

comme a^u est une constante, elle n'est pas soumise au passage à la limite et nous pouvons donc écrire

$$= a^u \cdot \lim_{x \to u} \frac{a^{x-u} - 1}{x - u}$$

posons maintenant $x - u = t$; lorsque $x \to u$, nous avons $x - u \to 0$ et donc $t \to 0$; de plus, comme a^u n'est autre que *f(u)* , nous pouvons enfin écrire :

$$f'(u) = f(u) \cdot \lim_{t \to 0} \frac{a^t - 1}{t}$$

Pour aller plus loin, considérons un cas particulier de fonction exponentielle, par exemple la fonction $f(x) = 2^x$. Le résultat obtenu ci-dessus devient :

$$f'(u) = f(u) \cdot \lim_{t \to 0} \frac{2^t - 1}{t}$$

Evaluons cette limite à l'aide de la calculatrice (nous admettons qu'elle existe).

t	$\lim_{t \to 0} \frac{2^t - 1}{t}$
0,1	0,71773
0,01	0,69556
0,001	0,69339
0,0001	0,69317
0,00001	0,69315

Ce processus peut bien sûr être poursuivi aussi loin que l'on veut. A ce stade, nous pouvons écrire :

$$f'(u) \approx 0,69315 \cdot f(u)$$

Ce résultat étant valable en tout réel u où la fonction f est dérivable, nous pouvons en déduire l'expression de la fonction dérivée de $f(x) = 2^x$:

$$f'(x) \approx 0{,}69315 \cdot f(x)$$

Ce qui peut aussi s'écrire

$$\boxed{\left(2^x\right)' \approx 0{,}69315 \cdot 2^x}$$

Nous sommes donc en présence d'une situation nouvelle : la fonction dérivée est « simplement » une fonction <u>multiple</u> de la fonction de départ. C'est d'ailleurs le cas pour toute fonction exponentielle $f(x) = a^x$!

<u>Exercice</u>

En partant de $f'(u) = f(u) \cdot \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{a^t - 1}{t}$ et en évaluant la limite à l'aide de la calculatrice, déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3^x$

b) $f(x) = 10^x$

c) $f(x) = (1{,}5)^x$

d) $f(x) = (0{,}5)^x$

<u>7.3. Une fonction exponentielle particulière</u>

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que certaines fonctions exponentielles sont <u>supérieures</u> à leur fonction dérivée. C'est le cas de $f(x) = (1{,}5)^x$ et de $f(x) = 2^x$. D'autres sont <u>inférieures</u> à leur fonction dérivée. C'est le cas de $f(x) = 3^x$ et $f(x) = 10^x$.

Une question vient naturellement à l'esprit : existe-t-il une fonction exponentielle qui soit <u>égale</u> à sa fonction dérivée ?

Si tel est le cas, il faut que dans l'égalité $f'(u) = f(u) \cdot \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{a^t - 1}{t}$ la limite soit égale à 1 !

Il faut donc rechercher une base a telle que $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{a^t - 1}{t} = 1$.

Nous avons déjà vu que si $a = 2$, cette limite est inférieure à 1 et vaut environ 0,69315 . Par contre, si $a = 3$, elle vaut est supérieure à 1 et vaut environ 1,09861 .

Si nous voulons que la limite soit égale à 1 , il semble logique de prendre une base comprise entre 2 et 3 .

Essayons $a = 2{,}5$

Evaluons $\lim\limits_{t \to 0} \frac{(2{,}5)^t - 1}{t}$ à l'aide de la calculatrice. Nous trouvons environ 0,91629 . Comme ce résultat est inférieur à 1 , prenons une base entre 2,5 et 3 .

Essayons $a = 2{,}75$

…

Exercice

Poursuivre le processus entamé ci-dessus afin de cerner de plus en plus la base de la fonction exponentielle qui est égale à sa dérivée.

Une autre approche

Nous cherchons une base a telle que $\lim\limits_{t \to 0} \frac{a^t - 1}{t} = 1$, autrement dit, telle que :

$\frac{a^t - 1}{t} \approx 1$ lorsque $t \approx 0$

$a^t - 1 \approx t$

$a^t \approx 1 + t$

$a \approx (1 + t)^{\frac{1}{t}}$

Posons $\frac{1}{t} = n$.

$a \approx (1 + \frac{1}{n})^n$

Si $t \approx 0$ et positif, alors n sera très grand. Donc :

$$a = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

Et la base que nous cherchons n'est autre que … revoir la page 13 !

7.4. Dérivées des fonctions exponentielles

Le paragraphe précédent nous fournit la première formule.

$$\boxed{\left(e^{x}\right)' = e^{x}} \qquad (1)$$

En vertu de la règle de dérivation des fonctions composées, nous obtenons ensuite

$$\boxed{\left(e^{u(x)}\right)' = e^{u(x)} \cdot u'(x)} \qquad (2)$$

Par exemple, si $f(x) = e^{3x^2-1}$, alors, $f'(x) = e^{3x^2-1} \cdot (3x^2-1)' = 6x \cdot e^{3x^2-1}$

Nous allons maintenant établir la dérivée de $f(x) = a^x$.

$$\boxed{\left(a^{x}\right)' = a^{x} \cdot \ln a} \qquad (3)$$

Preuve

Remarquons d'abord que $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ (cette formule est parfois appelée « formule de changement de base d'exponentielle »).

En effet : $e^{x\cdot \ln a} = \left(e^{\ln a}\right)^x = \left(e^{\log_e a}\right)^x = a^x$.

Ceci va nous permettre de dériver a^x en utilisant la formule (2) .

Nous avons successivement

$$a^x = e^{x\cdot \ln a}$$

$$(a^x)' = (e^{x\cdot \ln a})'$$

$$(a^x)' = e^{x\cdot \ln a} \cdot (x \cdot \ln a)' \qquad \text{[utilisation de la formule] (2)}$$

$$(a^x)' = e^{x\cdot \ln a} \cdot \ln a \qquad \text{[car } \ln a \text{ est une constante]}$$

Enfin, la règle de dérivation des fonctions composées, nous donne

$$\boxed{\left(a^{u(x)}\right)' = a^{u(x)} \cdot u'(x) \cdot \ln a} \qquad (4)$$

Par exemple, si $f(x) = 2^{5x^3+x}$, alors, $f'(x) = 2^{5x^3+x} \cdot (5x^3+x)' = (15x^2+1) \cdot 2^{5x^3+x}$.

Passons aux fonctions logarithmiques.

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}} \qquad (5)$$

<u>Preuve</u>

Soit la fonction $f(x) = \ln x$.
Nous pouvons évidemment écrire $e^{f(x)} = e^{\ln x}$, ce qui donne $e^{f(x)} = x$.

Dérivons cette dernière égalité membre à membre :

$$\left(e^{f(x)}\right)' = (x)'$$

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) = 1 \qquad \text{[application de la formule (2)]}$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}} = \frac{1}{x}$$

La règle de dérivation des fonctions composées permet d'obtenir :

$$\boxed{(\ln u(x))' = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)} \qquad (6)$$

Par exemple, si $f(x) = \ln(3x-2)$, alors $f'(x) = \dfrac{1}{3x-2} \cdot (3x-2)' = \dfrac{3}{3x-2}$.

Voyons le cas d'une fonction logarithme de base quelconque.

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}} \qquad (7)$$

<u>Preuve</u>

La formule de changement de base de logarithme permet d'écrire : $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.
La dérivée s'obtient facilement en tenant compte du fait que $\ln a$ est une constante :

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Et enfin,

$$\boxed{(\log_a u(x))' = \frac{1}{u(x) \cdot \ln a} \cdot u'(x)} \qquad (8)$$

Par exemple : $\left(\log_2 \sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x} \cdot \ln 2} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x} \cdot \ln 2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x \cdot \ln 2}$.

Exercice

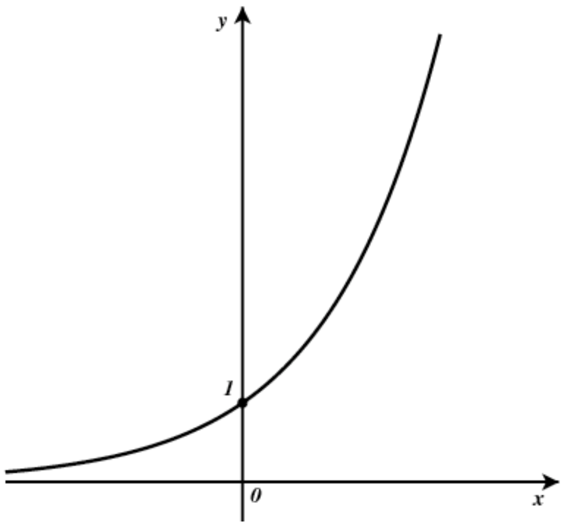
Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

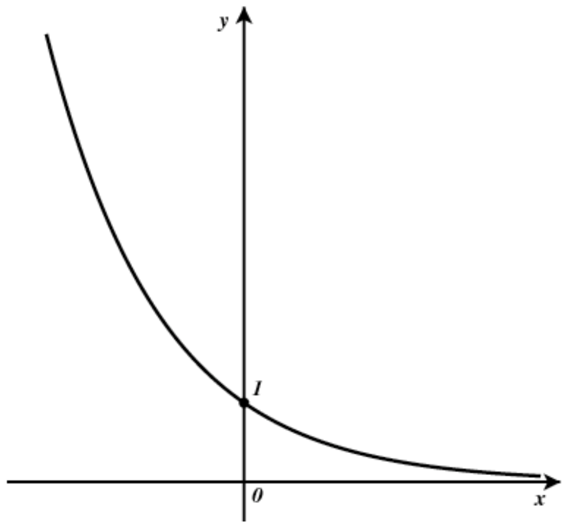
1. $f(x) = e^{-3x}$
2. $f(x) = e^{x} \cdot x$
3. $f(x) = \dfrac{e^{x}}{x}$
4. $f(x) = x \cdot \ln x$
5. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
6. $f(x) = \ln(1-4x)$
7. $f(x) = e^{-x^2}$
8. $f(x) = \ln(\ln x)$
9. $f(x) = \dfrac{x^3}{\ln x}$
10. $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$
11. $f(x) = \dfrac{1}{1-\ln x}$
12. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

8. Limites des fonctions exponentielles et logarithmiques

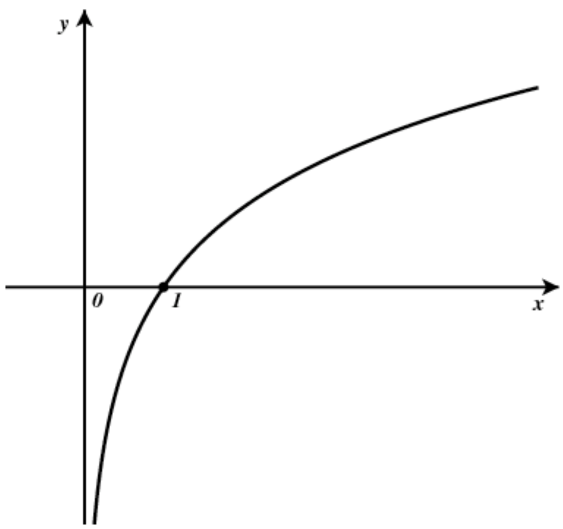
8.1. Limites des fonctions de référence

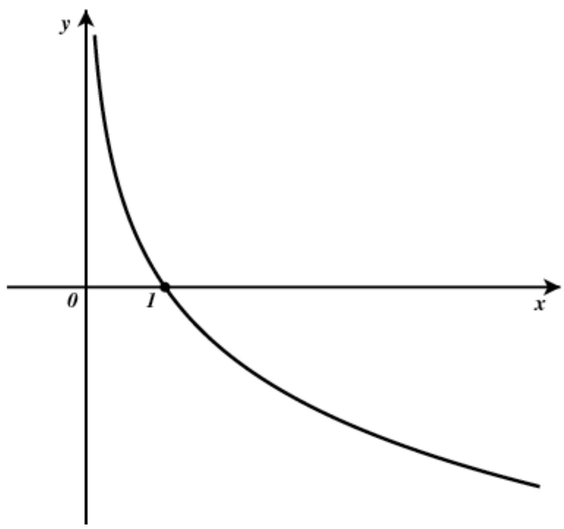
En observant les graphiques des fonctions exponentielles et des fonctions logarithmes, nous avions déjà déterminé certaines limites. Elles nous servirons de base pour la suite.

<table>
<tr><th colspan="2">Fonctions exponentielles</th></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>

$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$</td><td>

$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Fonctions logarithmes</th></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>

$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$</td><td>

$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$</td></tr>
</table>

Exercices de calculs de limites

Série 1

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_{0,5} x$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$ g) $\lim\limits_{x\to-\infty} 0{,}2^x$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_2 x$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{0.9} x$

Série 2

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}$ e) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{\ln x}$ g) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x\cdot e^x)$ d) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1-x)$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\frac{1}{x^2}$

Certaines limites présentent des cas d'indétermination qui résistent aux techniques vues en cinquième. La règle dite de L'HOSPITAL peut alors être utile.

8.2. La règle de L'HOSPITAL

Si f et g sont deux fonctions telles que

- $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ présente un cas d'indétermination du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$
- il existe un intervalle ouvert comprenant a sur lequel
  - f et g sont dérivables
  - f' et g' ne sont ni simultanément nulles, ni simultanément infinies, sauf éventuellement en a
  - $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (elle est réelle ou infinie)

alors

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Exemples

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$

Lorsque x tend vers 3, tant le numérateur que le dénominateur tendent vers 0.
Nous sommes donc dans le cas d'indétermination « $\dfrac{0}{0}$ » et nous pouvons appliquer le règle de L'HOSPITAL :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{2x - 4}{2x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Pour rappel, la technique que nous utilisions auparavant consistait à factoriser le numérateur et le dénominateur :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x-1}{x+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ce n'est donc pas tant pour ce genre de limite que nous avons besoin de la règle de L'HOSPITAL, mais bien pour des limites de fonctions exponentielles, logarithmiques ou trigonométriques.

2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{\ln x}$

Les deux termes de la fraction tendent vers $+\infty$. Nous sommes dans le cas « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » pour lequel nous pouvons aussi appliquer la règle de L'HOSPITAL :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} 2x \cdot x = \lim_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty$$

3. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$

La règle de L'HOSPITAL s'applique encore à ce cas d'indétermination « $\dfrac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1} = \sin 0 = 0$$

Exercice : calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x \cdot e^{-x})$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} (x \cdot \ln x)$

9. Études de fonctions exponentielles et logarithmiques

1. Etudier complètement les fonctions suivantes : domaine de définition, asymptotes, variations et concavité. Ensuite, réaliser leur représentation graphique.

   a) $f(x) = e^{-x^2}$

   b) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

   c) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

   d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

   e) $f(x) = x \cdot \ln x$

   f) $f(x) = x \cdot e^x$

---

2. La fonction $f(x) = e^{\frac{2x-3}{x+2}}$ possède-t-elle une asymptote horizontale ? Si oui, donner son équation.

---

3. La fonction $f(x) = x + e^x$ possède-t-elle une asymptote oblique ? Si oui, donner son équation.

---

4. La fonction suivante, appelée *fonction logistique*, décrit l'évolution d'une colonie de protozoaires du type *Paramecium caudata*. La variable x représente le nombre de jours tandis que *f(x)* représente le nombre d'individus de la population.

$$f(x) = \frac{105}{1 + 34 \cdot e^{-1{,}1244 \cdot x}}$$

   a) Quel est le nombre de microbes au début de l'observation ?
   b) Quel est le nombre de microbes après dix jours ? Après cent jours ?
   c) Montrer que cette population va croître au cours du temps.
   d) Cette population ne dépassera pas un certain « plafond ». Pourquoi ?
   e) Déterminer après combien de jours le taux d'accroissement de la population sera maximal.

---

5. Voici une autre fonction logistique, décrivant cette fois la hauteur atteinte par un arbre en fonction du temps (exprimé en années) :

$$h(t) = \frac{120}{1 + 200 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t}}$$

   a) Quelle était la hauteur initiale de l'arbre ?
   b) Quelle sera la hauteur de l'arbre dans dix ans ? Dans vingt ans ?
   c) Quelle hauteur l'arbre ne pourra-t-il dépasser ?