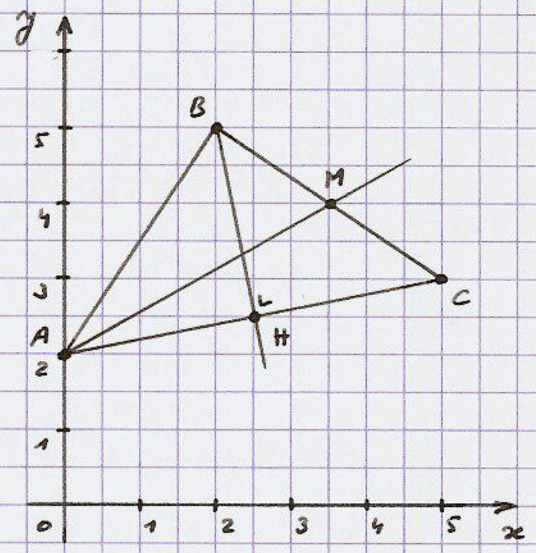
Exercice de géométrie analytique.

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(0,2)$, $B(2,5)$ et $C(5,3)$.

Déterminer
1°/ une équation cartésienne de la droite AB ;
2°/ une équation cartésienne de la médiane issue de A du triangle ABC ;
3°/ une équation cartésienne de la hauteur issue de B du triangle ABC ;
4°/ la distance entre le point B et la droite AC.

Solution.



1°/ $AB \equiv y = mx + p$

$m = \dfrac{5-2}{2-0} = \dfrac{3}{2}$

$p = 2$ car $A(0,2) \in AB$.

Donc, $\boxed{AB \equiv y = \frac{3}{2}x + 2}$.

2°/ Milieu de $[BC]$:

$M\left(\dfrac{2+5}{2}, \dfrac{5+3}{2}\right) = \left(\dfrac{7}{2}, 4\right)$.

La médiane issue de A est la droite AM et sa pente est : $\dfrac{4-2}{\frac{7}{2}-0} = \dfrac{2}{\frac{7}{2}} = \dfrac{4}{7}$.

Donc : $AM \equiv y = \frac{4}{7}x + p$.

Comme $A(0,2) \in AM$, nous avons de nouveau $p = 2$.

Donc : $\boxed{AM \equiv y = \frac{4}{7}x + 2}$.

3°/ La hauteur issue de B est perpendiculaire à AC.
La pente de AC vaut $\dfrac{3-2}{5-0} = \dfrac{1}{5}$. Celle de h_B vaut donc -5.

$h_B \equiv y = -5x + p$.

Or, $B(2,5) \in h_B$, donc : $5 = -5.2 + p \rightarrow p = 15$

$\boxed{h_B \equiv y = -5x + 15.}$

4°/ Cherchons le point commun H à h_B et AC.
$AC \equiv y = \frac{1}{5}x + 2$ (vérifier). Donc, $-5x + 15 = \frac{1}{5}x + 2$.
La résolution de cette équation donne $x = 5/2$. En remplaçant cette valeur dans l'équation de h_B ou AC, on trouve $y = 5/2$.
Donc, $H(5/2, 5/2)$ et $d(B,AC) = d(B,H) = \sqrt{(2-5/2)^2 + (5-5/2)^2} = \sqrt{\frac{13}{2}} \simeq 2{,}55$.