Croissance exponentielle : solutions des exercices

1. Population du Congo

a) Population en 2025 : $P(12) = 63 \cdot 1{,}03^{12} \approx 89{,}82$ millions d'habitants.

b) $P(n) = 63 \cdot 1{,}03^n = 80 \Leftrightarrow n = \log_{1,03} \dfrac{80}{63} \approx 8{,}08$. Au cours de l'année 2021.

c) $126 = 63 \cdot 1{,}03^n \Leftrightarrow 2 = 1{,}03^n \Leftrightarrow n = \log_{1,03} 2 \approx 23{,}45$. Il faut environ 23 années et demie à cette population pour doubler.

---

2. Culture de bactéries

a) Soit n le nombre de périodes de trois jours écoulées depuis le début de l'observation.
La formule de référence est alors : $P(n) = 240 \cdot 2^n$.
Après 12 jours, il y aura $P(4) = 240 \cdot 2^4 = 3840$ bactéries.

b) On a : $P\left(\dfrac{5}{3}\right) = 240 \cdot 2^{\frac{5}{3}} \approx 761{,}95$. Il y aura environ 762 bactéries.

c) Il faut résoudre $1000 = 240 \cdot 2^n \Leftrightarrow n = \log_2 \dfrac{1000}{240} \approx 2{,}0589$.
Il faudra donc environ $2{,}0589 \cdot 3 \approx 6{,}18$ jours.

d) Comme le facteur de croissance vaut 2 pour une période de trois jours, il vaut $2^{\frac{7}{3}} \approx 5{,}04$ pour une semaine.

e) Pour une période de 3 jours, le facteur de croissance a vaut 2 .
Donc, $2 = 1 + \dfrac{t}{100} \rightarrow t = 100$; le taux de croissance pour 3 jours est de 100 % .
Pour une période de 6 jours le facteur de croissance vaut 4 et le taux de croissance est de 300 % .

---

3. Décroissance exponentielle d'une température

a) Soit n le nombre de périodes de 5 minutes.
La formule de référence est donc : $T(n) = 98 \cdot 0{,}85^n$.

Après 5 minutes : $T(1) = 98 \cdot 0{,}85 = 83{,}3$ (°C) .

Après 10 minutes : $T(2) = 98 \cdot 0{,}85^2 \approx 70{,}8$ (°C) .

Après 15 minutes : $T(3) = 98 \cdot 0{,}85^3 \approx 60{,}2$ (°C) .

b) Après 3 minutes : $T\left(\frac{3}{5}\right)=98\cdot 0{,}85^{\frac{3}{5}}\approx 88{,}9$ (°C) .

Après 12 minutes : $T\left(\frac{12}{5}\right)=98\cdot 0{,}85^{\frac{12}{5}}\approx 66{,}3$ (°C) .

c) Il faut résoudre l'équation : $75=98\cdot 0{,}85^n$. On obtient : $n=\log_{0,85}\frac{75}{98}\approx 1{,}6458$.
Il faut donc attendre environ $1{,}6458\times 5\approx 8{,}23$ minutes.

d) Démarche analogue à celle du point (c) :

$$49=98\cdot 0{,}85^n \Leftrightarrow \frac{1}{2}=0{,}85^n \Leftrightarrow n=\log_{0,85}\frac{1}{2}\approx 4{,}2650 \ .$$

Il faut donc environ $4{,}2650\times 5\approx 21{,}33$ minutes.

---

4. Placement d'un capital

a) La formule de référence étant $C(n)=C(0)\cdot\left(1+\frac{t}{100}\right)^n$, il faut résoudre :

$$3000=2500\cdot\left(1+\frac{t}{100}\right)^5 \ .$$

Donc : $\frac{6}{5}=\left(1+\frac{t}{100}\right)^5 \Leftrightarrow \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{1}{5}}=1+\frac{t}{100} \Leftrightarrow t=\left[\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{1}{5}}-1\right]\times 100\approx 3{,}71$.

Le taux d'intérêt annuel doit donc être d'environ 3,71 % .

b) Cela signifie qu'il faut que

$$1{,}2=\left(1+\frac{t}{100}\right)^{10} \Leftrightarrow 1{,}2^{\frac{1}{10}}=1+\frac{t}{100} \Leftrightarrow t=\left(1{,}2^{\frac{1}{10}}-1\right)\times 100\approx 1{,}84 \ .$$

Le taux d'intérêt annuel doit donc être d'environ 1,84 % .